Entiers, ensembles finis, dénombrement

Exercice 159. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$, l'entier $5^n - 3^n$ n'est pas un nombre premier.

Corrigé 159. Soit $n \geqslant 1$. On a

$$5^n - 3^n = (5-3)\sum_{k=0}^{n-1} 5^k 3^{n-1-k} = 2\sum_{k=0}^{n-1} 5^k 3^{n-1-k},$$

donc $5^n - 3^n$ n'est pas premier.

Exercice 160. Soient a et b deux entiers naturels de même parité. Montrer que $\dfrac{a^3+b^3}{2}$ est un entier naturel non premier.

Corrigé 160. Si $b=0$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $a = 2p$ et on a $\dfrac{a^3+b^3}{2} = \dfrac{8p^3}{2} = 4p^3$, donc le nombre cherché n'est pas premier.
Le cas $a=0$ est similaire à avant.
Si $a=b=1$, l'entier cherché est égal à 1, donc non premier.
Supposons que $(a,b) \in (\mathbf{N}^\star)^2\backslash\{(1,1)\}$. On a $\dfrac{a^3+b^3}{2} = \dfrac{a+b}{2}(a^2-ab+b^2)$. Or $a+b$ est un nombre pair strictement supérieur à 2, donc $\dfrac{a+b}{2}$ est un entier différent de 1. Par ailleurs, $a^2-ab+b^2 = (a-b)^2+ab \geqslant ab > 1$. Ainsi le nombre proposé n'est pas premier.

Exercice 161. Soit n un entier naturel. Montrer que le nombre $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.

Corrigé 161. Dans une première solution, nous allons utilisé que pour tous entiers naturels a, b, p et n, si $a \equiv b\ [p]$, alors $a^n \equiv b^n [p]$. En effet, soit $(a,b,p,n) \in \mathbf{N}^4$ tel que $a \equiv b\ [p]$. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a = b+kp$. En particulier, $a^n = (b+kp)^n = b^n + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(kp)^j b^{n-j} = b^n + kp\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(kp)^{j-1}b^{n-j}$, puis $a^n \equiv b^n\ [p]$.
Ici, on a $3^{2n+1}+2^{n+2} = 3\times 9^n + 4\times 2^n$. Avec le résultat qui vient d'être démontré, puisque $9 \equiv 2\ [7]$, on a $9^n \equiv 2^n\ [7]$. Donc $3^{2n+1}+2^{n+2} \equiv 3\times 2^n + 4\times 2^n\ [7]$, puis $3^{2n+1}+2^{n+2} \equiv 7\times 2^n\ [7]$ et enfin $3^{2n+1}+2^{n+2} \equiv 0\ [7]$.
Autre solution (par récurrence) : Posons u_n l'entier choisi. L'idée de l'hérédité est la suivante :

$$u_{n+1} = 9\times 3^{2n+1} + 2\times 2^{n+2} = 9(3^{2n+1}+2^{n+2}) - 9\times 2^{n+2} + 2\times 2^{n+2} = 9u_n - 7\times 2^{n+2},$$

qui est divisible par 7.
Autre solution (avec une suite récurrente du second ordre, on étudiera cela plus tard !). On reprend u_n comme avant. On reconnaît le terme général d'une suite récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique a pour solutions 3^2 et 2, donc c'est, avec une inconnue notée r, l'équation $r^2 - (3^2+2) + 3^2\times 2 = 0$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = (3^2+2)u_{n+1} - 3^2\times 2u_n$$

On conclut ensuite avec une récurrence à deux pas.

Exercice 162. Soit n un entier naturel non nul et q un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que si q divise n, alors q ne divise pas $n+1$. En utilisant ce résultat, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Corrigé 162. On suppose que $q|n$ et par l'absurde que $q|n+1$. Alors il existe $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ tel que $n = aq$ et $n+1 = bq$. Ainsi $(b-a)q = 1$, ce qui est impossible puisque $b-a \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}$ avec $q \neq 1$.

On suppose par l'absurde qu'il existe un nombre fini m de nombres premiers $p_1, ..., p_m$. Considérons $N = \prod_{k=1}^{m} p_k$. Alors, pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, $p_k|N$ et donc p_k ne divise pas $N+1$. Comme aucun nombre premier ne divise $N+1$, $N+1$ est un "nouveau" nombre premier, ce qui est contradictoire.
Remarque : en général, le produit des m premiers nombres premiers augmenté de 1 n'est pas un nombre premier (considérer $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 59 \times 509$...)

. . . .

Exercice 163. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'aucun des entiers

$$n!+2, \quad n!+3, \quad \cdots \quad n!+n$$

n'est premier. Que peut-on en déduire ?

Corrigé 163. Soit $k \in [\![2,n]\!]$.

$$n!+k = 1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times k \times \times (k+1) \times \cdots \times n + k = k \times (1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times 1 \times (k+1) \times \cdots \times n + 1),$$

donc $n!+k$ n'est pas premier, puisqu'il s'écrit comme un produit d'entiers différents de 1.
On obtient qu'il existe des intervalles de $\mathbf{N}$ de longueur arbitrairement grande ne contenant aucun nombre premier.

. . . .

Exercice 164.
1. Montrer que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^n par 9 est égal à 1. En déduire le critère de divisibilité par 9 : un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
2. Démontrer le critère de divisibilité par 11 : un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11 (la somme alternée de 123 456 est $1-2+3-4+5-6$).

Corrigé 164. Soit n un entier naturel dont l'écriture décimale est $n = \overline{a_p...a_1a_0}$, ce qui signifie que

$$n = a_p 10^p + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0,$$

avec $a_i \in [\![0,9]\!]$ pour tout $i \in [\![0,p]\!]$.

1. On a $10 \equiv 1$ [9], d'où $10^n \equiv 1$ [9] donc le reste de la division euclidienne de 10^n par 9 est 1 (on peut aussi montrer facilement ce résultat par récurrence). Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $\alpha_k \in \mathbf{N}$ tel que $10^k = 9\alpha_k + 1$. On en déduit :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k(9\alpha_k + 1) = \underbrace{9\sum_{k=0}^{p} a_k\alpha_k}_{\text{multiple de 9}} + \sum_{k=0}^{p} a_k,$$

donc n est divisible par 9 si et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ l'est aussi.

Autre méthode. Le binôme de Newton assure que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $10^k = (9+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 9^j$. Ainsi

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 9^k \right) = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(1 + 9\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 9^{j-1} \right) = \sum_{k=0}^{p} a_k + 9\sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 9^{j-1} \right).$$

L'entier n est donc multiple de 9 si et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 9.

Remarque : le même calcul permet d'obtenir un critère de divisibilité par 3.

2. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons H_k : « le reste de la division euclidienne de 10 par 11 est $(-1)^k$ ». On a $10^0 \equiv 1$ [11], donc H_0 est vraie. Soit $k \in \mathbf{N}$ tel H_k soit vraie. On a $10^{k+1} \equiv 10 \times (-1)^k$ [11]. Or $10 \equiv -1$ [11], d'où $10^{k+1} \equiv (-1) \times (-1)^k$ [11], et H_{k+1} est vraie. Finalement, le principe de récurrence assure que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $10^k \equiv (-1)^k$ [11]. Il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $\alpha_k \in \mathbf{N}$ tel que $10^k = 11\alpha_k + (-1)^k$. Donc

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k(11\alpha_k + (-1)^k) = \underbrace{11 \sum_{k=0}^{p} a_k\alpha_k}_{\text{multiple de 11}} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 11 si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Autre méthode. Le binôme de Newton assure que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $10^k = (11-1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 11^j$. Ainsi,

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j 11^j \right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k + 11 \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 11^{j-1} \right)$$

L'entier n est donc multiple de 11 si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

....

Exercice 165 (*Nombres de Mersenne*). 1. Soit p et q deux entiers naturels. Montrer que $(2^p - 1) \mid (2^{pq} - 1)$.

2. En déduire que pour tout entier naturel, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
3. La réciproque est-elle vraie ? (on pourra tester les entiers premiers inférieurs à 13).

Corrigé 165. 1. On a $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1) \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k \cdot 1^{q-1-k}$, donc $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.
Autre méthode. $2^p \equiv 1$ $[2^p - 1]$, puis $2^{pq} \equiv 1^{pq}$ $[2^p - 1]$, d'où le résultat.

2. Raisonnons par contraposition. Supposons que n n'est pas premier. Alors il existe deux entiers naturels p et q, différents de 1 et de n, tels que $n = pq$. Le résultat précédent assure que $2^p - 1$ divise $2^n - 1$. Comme $2^p - 1 \notin \{1, 2^n - 1\}$ (car $p \notin \{1, n\}$), on en déduit que $2^n - 1$ n'est pas premier. On vient de montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
3. La réciproque est fausse : $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.
Remarque : on ne sait toujours pas si la liste des nombres de Mersenne premiers est finie. Actuellement, seuls 51 nombres de Mersenne premiers ont été découverts, et le dernier l'a été en 2016 à l'aide d'un supercalculateur. Ce nombre $(2^{82\ 589\ 933} - 1)$ contient 24 862 048 chiffres en base 10, et il est le plus grand nombre premier aujourd'hui connu !

....

Exercice 166. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que les fractions $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ et $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ sont irréductibles.

Corrigé 166. On dit qu'une fraction $\dfrac{a}{b}$ (où $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^\star$) est irréductible si $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

1. • *Méthode 1.* Déterminons le PGCD de $12n + 1$ et $30n + 2$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide. On a :

$$\begin{array}{rrcl} & 30n+2 & = & (12n+1) \times 2 + 6n \\ \text{puis} & 12n+1 & = & 6n \times 2 + \boxed{1} \\ \text{puis} & 6n & = & 1 \times 6n + 0 \end{array}$$

donc $\mathrm{PGCD}(12n + 1, 30n + 2) = 1$, et la fraction proposée est irréductible.

• *Méthode 2.* Raisonnons par l'absurde, et notons $p \in \mathbf{N} \backslash \{0, 1\}$ un diviseur commun de $12n+1$ et $30n+2$. On a

$$12n + 1 \equiv 0 [p] \quad \text{donc} \quad 60n + 5 \equiv 0\ [p].$$

(on a multiplié par 5 l'équation : vérifier que c'est licite). De plus,

$$30n+2 \equiv\ 0[p] \quad \text{donc} \quad 60n+4 \equiv 0\ [p].$$

En soustrayant la deuxième équation à la premier, on obtient $1 \equiv 0\ [p]$, ce qui est absurde. Ainsi la fraction est irréductible.

2. De même,

$$\begin{array}{rrcl} & 21n+14 & = & (14n+3)\times 1 + (7n+1) \\ \text{puis} & 14n+3 & = & (7n+1)\times 2 + \boxed{1} \\ \text{puis} & 7n+1 & = & 1\times(7n+1)+0 \end{array}$$

donc $\mathrm{PGCD}(21n+14, 13n+3) = 1$, et la fraction proposée est irréductible.

. . . .

Exercice 167. On divise 2003 par n, le reste est égal à 8. On divise 3002 par n, le reste obtenu est 27. Que vaut n ?

Corrigé 167. Il existe $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2003 & = & an+9 \\ 3002 & = & bn+27 \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 1995 & = & an \\ 2975 & = & bn \end{array}\right. .$$

Ainsi n divise 1995 et 2975, donc n divise également $\mathrm{PGCD}(1995, 2975)$. Or

$$\begin{array}{rrcl} & 2975 & = & 1995\times 1 + 980 \\ \text{puis} & 1995 & = & 980\times 2 + \boxed{35} \\ \text{puis} & 980 & = & 28\times 35 + 0 \end{array}$$

Donc $\mathrm{PGCD}(1995, 2975) = 35$. Ainsi n divise 35, d'où $n \in \{1,5,7,35\}$. On peut les tester tous, ou raisonner en encore un peu : le reste d'une division euclidienne doit être inférieur au diviseur, on en déduit $n \geqslant 28$. Finalement, $n = 35$.

. . . .

Exercice 168.
1. Déterminer les entiers naturels vérifiant $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PGCD}(x,y) & = & 3 \\ x+y & = & 21 \end{array}\right.$.
2. Déterminer les entiers naturels vérifiant $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PGCD}(x,y) & = & 6 \\ \mathrm{PPCM}(x,y) & = & 72 \end{array}\right.$.

Corrigé 168.
1. *Analyse.* Soit $(x,y) \in \mathbf{N}^2$ vérifiant le système. En posant $x' = \frac{x}{3}$ et $y' = \frac{y}{3}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PGCD}(x',y') & = & 1 \\ x'+y' & = & 7 \end{array}\right.$$

Puisque $x'+y'=7$, on a $(x',y') \in \{(0,7),(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),(7,0)\}$,

$$(x,y) \in \{(0,21),(3,18),(6,15),(9,12),(12,9),(15,6),(18,3),(21,0)\}.$$

Synthèse.
- On a $\mathrm{PGCD}(0,21) = 21$ donc $(0,21)$ n'est pas solution.
- On a $\mathrm{PGCD}(3,18) = 3$, donc $(3,18)$ est solution.
- On a $\mathrm{PGCD}(6,15) = 3$, donc $(6,15)$ est solution.
- On a $\mathrm{PGCD}(9,12) = 3$, donc $(9,12)$ est solution.
- Les autres cas s'obtiennent à partir de ceux déjà traités, par symétrie du problème.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{(3,18),(6,15),(9,12),(12,9),(15,6),(18,3)\}$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbf{N}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PGCD}(x,y) & = & 6 \\ \mathrm{PPCM}(x,y) & = & 72 \end{array}\right. \iff \exists (x',y') \in \mathbf{Z}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 6x' \\ y & = & 6y' \\ \mathrm{PGCD}(x',y') & = & 1 \\ \mathrm{PPCM}(x',y') & = & 12 \end{array}\right. .$$

Intéressons-nous au problème

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{PGCD}(x',y') &=& 1\\ \mathrm{PPCM}(x',y') &=& 12\end{array}\right.,$$

d'inconnue $(x',y')\in\mathbf{N}^2$.
Analyse. Soit $(x',y')\in\mathbf{N}^2$ vérifiant le système (S). On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{PGCD}(x',y') &=& 1\\ x'y' &=& 12\end{array}\right.$$

Puisque $x'y'=12$, on en déduit $(x',y')\in\{(1,12),(2,6),(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)\}$.
Synthèse.

- $\mathrm{PGCD}(1,12)=1$, donc $(1,12)$ est une solution.
- $\mathrm{PGCD}(2,6)=2$, donc $(2,6)$ n'est pas une solution.
- $\mathrm{PGCD}(3,4)=1$, donc $(3,4)$ est une solution.
- Les autres cas s'obtiennent à partir de ceux déjà traités, par symétrie du problème.

Finalement, les solutions de (S) sont $(1,12)$, $(3,4)$, $(4,3)$ et $(12,1)$. On en déduit que l'ensemble des solutions du problème initial est :

$$\{(6,72),(12,36),(18,24),(24,18),(36,12),(72,6)\}.$$

....

Exercice 169 (*Petit théorème de Fermat*). Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k\in[\![1,p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que pour tout entier a, a^p-a est un multiple de p. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

Corrigé 169.

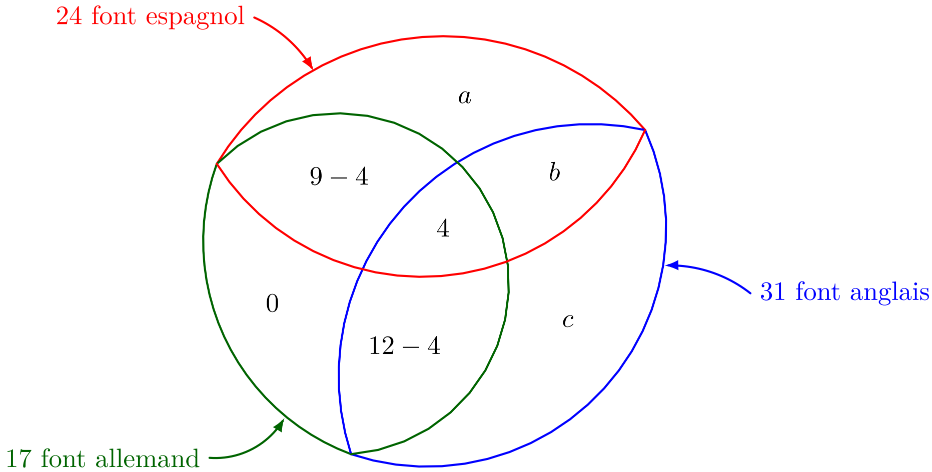
1. Soit $k\in[\![1,p-1]\!]$. On a $p!=k!(p-k)!\binom{p}{k}$. Ainsi p divise $k!(p-k)!(\binom{p}{k})$. Comme $1\leqslant k\leqslant p-1$, p ne divise pas $k!$ (sinon p divise l'un des facteurs de $k!$ mais ils sont tous strictement inférieurs à p). De même, p ne divise pas $(p-k)!$, donc p divise $\binom{p}{k}$ (ce résultat, intuitif, est plus connu sous le nom de lemme d'Euclide et n'est pas très difficile à obtenir).
   Autre méthode (qui utilise le théorème de Gauss, hors-programme). Soit $k\in[\![1,p-1]\!]$.
   $$\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{p(p-1)\cdots(p-(k+1))}{k!}$$
   Comme $\binom{p}{k}$ est entier, alors $k!$ divise $p(p-1)\cdots(p-(k+1))$. De plus, $k!$ et p sont premiers entre eux (on utilise $0<k<p$), donc d'après le théorème de Gauss, $k!$ divise $(p-1)\cdots(p-(k+1))$. Autrement dit, il existe $m\in\mathbf{Z}$ tel que $mk!=(p-1)\cdots(p-(k+1))$, puis $\binom{p}{k}=mp$.
2. Pour tout $a\in\mathbf{N}^\star$ (le cas $a=0$ est trivial), on pose H_a : « $a^p\equiv a\ [p]$ ».
   H_1 est vraie. Soit $a\geqslant 1$ tel que H_a soit vraie. Alors
   $$(a+1)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k$$
   d'où, avec la question précédente,
   $$(a+1)^p\equiv\binom{p}{0}a^0+\binom{p}{p}a^p\ [p],\quad i.e.\quad (a+1)^p\equiv 1+a^p\ [p]$$
   d'où, avec H_a,
   $$(a+1)^p\equiv 1+a\ [p]$$
   Ainsi H_{a+1} est vraie et le principe de récurrence permet de conclure.

....

Exercice 170. Dans une classe de 38 élèves étudiant chacun au moins une langue, 31 étudient l'anglais, 24 l'espagnol, 17 l'allemand et 12 étudient à la fois anglais et allemand, 9 étudient espagnol et allemand, et 4 élèves étudient les trois langues simultanément. Calculer le nombre d'élèves :

1. étudiant l'anglais et l'espagnol ;
2. étudiant l'anglais ou l'espagnol ;
3. étudiant uniquement l'allemand.

Corrigé 170. On a :



Notons

- E l'ensemble des élèves étudiant l'espagnol ;
- F l'ensemble des élèves étudiant l'allemand ;
- G l'ensemble des élèves étudiant l'anglais.

D'après l'énoncé, $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Card}(E \cap G \cap A) & = & 4 \\ \mathrm{Card}(G \cap A) & = & 12 \end{array}\right.$, donc 8 élèves étudient seulement anglais et allemand.
De même, 5 élèves étudient seulement espagnol et allemand.
Il y a 17 élèves étudiant l'allemand et $5 + 8 + 4 = 17$, donc aucun élève n'étudie que l'allemand.
On a ensuite (avec les notations du dessin),

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9 + a + b & = & 24 \\ 12 + b + c & = & 31 \\ 17 + a + b + c & = & 38 \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{rcl} a + b & = & 15 \\ b + c & = & 19 \\ a + b + c & = & 21 \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 13 \\ c & = & 6 \end{array}\right. .$$

Ainsi :

1. Il y a $b + 4 = 17$ élèves étudiant l'anglais et l'espagnol.
2. Il y a $9 + 8 + 21 = 38$ élèves étudiant l'anglais ou l'espagnol.
3. Il y a 0 élève étudiant uniquement l'allemand.

....

Exercice 171. Dénombrer les nombres de 4 chiffres écrits uniquement avec les chiffres 1, 2 et 3.

Corrigé 171. La réponse est :

$$\underbrace{3}_{\text{choix du 1er chiffre}} \times \underbrace{3}_{\text{choix du 2e chiffre}} \times \underbrace{3}_{\text{choix du 3e chiffre}} \times \underbrace{3}_{\text{choix du 4e chiffre}} = 3^4 (= 81)$$

....

Exercice 172. Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9. On tire quatre boules de l'urne. Dénombrer le nombre de tirages possibles dans les trois cas suivants :

1. les tirages sont successifs et sans remise ;
2. les tirages sont successifs et avec remise ;

3. les tirages sont simultanés.

Corrigé 172.
1. Les tirages sont successifs et sans remise : on représente un tirage par le quadruplet des numéros obtenus. Un tirage correspond donc à une 4−liste d'éléments distincts de $[\![0,9]\!]$: il y en a $10 \times 9 \times 8 \times 7$.
2. Les tirages sont successifs et avec remise : avec la même représentation que précédemment, un tirage correspond à une 4−liste d'éléments de $[\![0,9]\!]$: il y en a donc 10^4 différents.
   Autre possibilité : il y a 10 choix possibles pour chacun des boules tirées.
3. Les tirages sont simultanés : on représente un tirage par l'ensemble des numéros tirés ; un tirage correspond donc ici à une partir à 4 éléments de $[\![0,9]\!]$. Il y a donc $\binom{10}{4}$ tirages possibles.

. . . .

Exercice 173. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former en utilisant uniquement les lettres du mot PARIS, sans répétition ? Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot PARIS existe-t-il ? Reprendre cette dernière question avec le mot BILLE, puis avec le mot ESCARPOLETTE.

Corrigé 173.
- Il y a $\binom{5}{3} = 10$ façons de choisir trois lettres parmi celles du mot PARIS. Ces trois lettres choisies, il y a $3! = 6$ mots différents possibles (on choisit la place de chacun des trois lettres : 3 choix pour la premier, 2 pour la deuxième, 1 pour la dernière). Il y a donc en tout 60 mots de trois lettres formés avec les lettres du mot PARIS.
  Une anagramme est une permutation des lettres : il y a $5! = 120$ anagramme du mot PARIS.
  Autre possibilité : on choisit la place du P : 5 choix. Puis la place du A : 4 choix. Ensuite, on positionne le R : 3 choix. Puis le I : 2 choix. Et enfin, il ne reste qu'une choix pour le S. En tout $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ anagrammes.
- Le mot BILLE comporte deux lettres identiques : on choisit la place des deux L : $\binom{5}{2} = 10$ choix possibles, puis la place du B : 3 choix, et celle du I : 2 choix, celle du E : 1 choix. Au total, 60 anagrammes du mot BILLE.
- Le mot ESCARPOLETTE comporte 3 E, 2 T et 7 lettres distinctes. On choisit la place des trois E : $\binom{12}{3} = 220$ choix, puis celle des deux T : $\binom{9}{2} = 36$ possibilités, puis la place de chacun des 7 lettres restantes : 7! choix. Au total, il y a $\frac{12!}{3!2!}$ anagrammes du mot ESCARPOLETTE.

. . . .

Exercice 174. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de quatre familles : pique, cœur, carreau et trèfle, chacune constituée de huit cartes : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7. On tire successivement et sans remise huit cartes dans un jeu de 32 cartes.
1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages contiennent au moins un as ?
3. Combien de tirages comprennent au moins un pique ou une dame ?

Corrigé 174.
1. Le nombre de tirages possibles est :
$$\underbrace{32}_{\text{choix de la 1ère carte}} \times \underbrace{31}_{\text{choix de la 2e carte}} \times \cdots \times \underbrace{25}_{\text{choix de la 8e carte}} = \frac{32!}{24!} \quad (= 424\ 097\ 856\ 000).$$
2. Dénombrons l'ensemble des tirages ne contenant pas d'as :
$$\underbrace{28}_{\text{choix de la 1ère carte non as}} \times \underbrace{27}_{\text{choix de la 2e carte non as}} \times \cdots \times \underbrace{21}_{\text{choix de la 8e carte non as}} = \frac{28!}{20!}.$$
   Il y a donc $\dfrac{32!}{24!} - \dfrac{28!}{20!}$ tirages contenant au moins un as (avec une machine à calculer, on trouve que ce nombre vaut 298 779 062 400).
3. Dénombrons l'ensemble des tirages ne comprenant ni pique, ni dame. Il y a $32 - 8 - 3 = 21$ cartes ni pique ni dame (8 pique dans le jeu, 3 dames non pique), donc il y a $\dfrac{21!}{13!}$ tirages ne contenant ni pique ni dame et donc $\dfrac{32!}{24!} - \dfrac{21!}{13!}$ tirages contenant au moins un pique ou une dame (pour indication, ça n'est pas demandé, ce nombre vaut : 415 893 139 200).

. . . .

Exercice 175. Dans un jeu de 32 cartes, on choisit (simultanément) cinq cartes au hasard.

1. Quel est le nombre total de mains que l'on peut obtenir ? (une main désigne les cartes détenues par le joueur)
2. Combien de ces mains contiennent exactement 4 as ?
3. Combien de ces mains contiennent exactement 3 as et 2 rois ?
4. Combien de ces mains contiennent au moins 3 rois ?
5. Combien de ces mains contiennent au moins un as ?
6. Combien de ces mains contiennent exactement 2 as et 2 carreaux ?

Corrigé 175. *Remarque importante :* Une main est l'ensemble des cartes tirées. Il n'y a pas d'ordre dans une main.

1. Une main est une partie à cinq éléments de l'ensemble des 32 cartes du jeu. Il y a donc $\binom{32}{5}$(= 201 376) mains possibles.
2. Nombre de mains contenant exactement 4 as :
   - choix des 4 as : $\binom{4}{4}$ possibilité ;
   - choix de la carte restante parmi les $28 = 32 - 4$ restantes : $\binom{28}{1}$ possibilités.

   Il y a donc $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 28$ possibilités.
3. Nombre de mains contenant exactement 3 as et 2 rois :
   - choix des 3 as (parmi 4) : $\binom{4}{3}$ possibilités ;
   - choix des 2 rois (parmi 4) : $\binom{4}{2}$ possibilités.

   Il y a donc $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 24$ possibilités.
4. Nombre de mains contenant au moins trois rois : on dénombre les deux situations disjointes « mains contenant exactement 3 rois » et « mains contenant exactement 4 rois ».
   (a) Mains contenant exactement 3 rois.
   - Choix des 3 rois : $\binom{4}{3}$ possibilités.
   - Choix de 2 cartes qui ne sont pas des rois : $\binom{28}{2}$ possibilités.

   Ainsi, il y a $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2}$ possibilités.

   (b) Mains contenant exactement 4 rois.
   - Choix des 4 rois : $\binom{4}{4}$ possibilités.
   - Choix d'une carte qui n'est pas un roi : $\binom{28}{1}$ possibilités.

   Donc il y a $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1}$ choix.

   Finalement, il y a $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{28}{1}$(= 1 540) mains contenant au moins trois rois. *Remarque :* Pourquoi la réponse

   $$\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{choix de 3 rois}} \times \underbrace{\binom{29}{2}}_{\text{choix des 2 autres cartes}}$$

   est-elle fausse ?
   Avec cette description, on obtient bien toutes les mains contenant au moins 3 as, mais certaines de ces mains sont décrites plusieurs fois. Par exemple, la main : {4 rois et la dame de cœur} est décrite par
   - ◦ choix de trois rois : roi de carreau, roi de pique, roi de trêfle ;
     ◦ choix des deux autre cartes : roi de cœur, dame de cœur.
   - et par :
     ◦ choix de trois rois : roi de cœur, roi de carreau, roi de pique ;
     ◦ choix des deux autres cartes : roi de trêfle, dame de cœur.
5. Nombre de main contenant au moins un as. On passe au complémentaire :

   $$\underbrace{\binom{32}{5}}_{\text{nombre total de mains}} - \underbrace{\binom{28}{5}}_{\text{nombre de mains sans as}} \quad (= 103\ 096).$$

6. Les mains contenant exactement 2 as et 2 carreaux sont de types disjoints : il y a celles contenant l'as de carreau, et celles ne contenant pas l'as de carreau. Il y en a donc :

$$\overbrace{\underbrace{\binom{1}{1}}_{\substack{\text{choix de l'as}\\ \text{de carreau}}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\substack{\text{choix d'un as}\\ \text{non carreau}}} \times \underbrace{\binom{7}{1}}_{\substack{\text{choix d'un}\\ \text{carreau non}\\ \text{as}}} \times \underbrace{\binom{21}{2}}_{\substack{\text{choix de deux}\\ \text{cartes non as,}\\ \text{non carreau}}}}^{\text{nombre de tels tirages contenant l'as de carreau}} + \overbrace{\underbrace{\binom{3}{2}}_{\substack{\text{choix des deux as}\\ \text{non carreau}}} \times \underbrace{\binom{7}{2}}_{\substack{\text{choix des deux}\\ \text{carreaux non as}}} \times \underbrace{\binom{21}{1}}_{\substack{\text{choix d'une}\\ \text{carte non carreau,}\\ \text{non as}}}}^{\text{nombre de tels tirages ne contenant pas l'as de carreau}}$$

c'est-à-dire $3 \times 7 \times 21 \times 10 + 3 \times 7 \times 3 \times 21 = 21^2 \times 13 (= 5\ 733)$.

. . . .

Exercice 176 . Douze livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Parmi ceux-ci, trois constituent les trois tomes d'un roman.

1. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, dans l'ordre (de gauche à droite : tome 1, 2 puis 3) ?
2. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, mais pas forcément dans l'ordre ?

Corrigé 176.

1. On remarque que le tome 1 ne peut pas être placé dans les deux dernières positions. Il y a donc 10 positions possibles pour le tome 1.
   Pour décrire une disposition des 12 livres pour laquelle les trois tomes du roman sont côte à côte dans l'ordre, on peut raisonner par étapes :
   - choix de la place du tome 1 : 10 possibilités ;
   - choix de la place du tome 2 : 1 possibilité (à droite du tome 1) ;
   - choix de la place du tome 3 : 1 possibilité ;
   - choix de la place du 1er livre restant : 9 possibilités ;
   - choix de la place du 2e livre restant : 8 possibilités ;
   - etc.
   - choix de la place du dernier livre : 1 possibilité.

   Il y a donc en tout $10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 1 = 10!$ dispositions possibles.
   Autre solution : on peut considérer les tomes 1, 2 et 3 comme un seul bloc 1-2-3. Dans ce cas, les étapes sont les suivantes :
   - choix de la place du bloc 1-2-3 : 10 possibilités ;
   - choix de la place du 1er livre restant : 9 possibilités ;
   - choix de la place du 2e livre restant : 8 possibilités ;
   - etc.
   - choix de la place du dernier livre : 1 possibilité.

   Il y a donc en tout $10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 1 = 10!$ dispositions possibles.
2. Pour une telle disposition, on peut :
   - choisir une disposition précédente (les trois tomes sont rangés dans l'ordre) : 10! possibilités.
   - mélanger les trois tomes, c'est-à-dire choisir le numéro du tome apparaissant en premier et le numéro du tome apparaissant en deuxième, le troisième correspondant nécessairement au tome non encore choisi : il y a $3 \times 2 \times 1 = 3!$ possibilités.

   Finalement, il y a $10! \times 3!$ dispositions possibles.

. . . .

Exercice 177. Une urne contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5, et sept boules noires numérotées de 1 à 7. On effectue quatre tirages successifs et avec remise. Dénombrer

1. les différents tirages possibles ;

2. les tirages amenant quatre boules rouges ;
3. les tirages amenant au moins une boule rouge ;
4. les tirages amenant trois boules rouges et une boule noire ;
5. les tirages bicolores.

Reprendre chacune de ces questions dans le cas de tirages successifs et sans remise, puis dans le cas de tirages simultanés.

Corrigé 177. I. Tirages successifs et avec remise.

1. Le nombre de tirages correspond au nombre de $4-$listes d'un ensemble à 12 éléments, à savoir 12^4 (on choisit la première boule : 12 choix, puis la deuxième boule : 12 choix, etc.).
2. On choisit la première boule rouge (5 possibilités), puis la deuxième (5 possibilités), etc. En tout, il y a 5^4 possibilités.
3. On dénombre plutôt les tirages ne contenant aucune boule rouge, ce qui revient à ne choisir que des boules noires : il y a 7^4 choix. Donc il y a $12^4 - 7^4$ tirages amenant au moins une boule rouge.
4.
   - Choix de la position de la boule noire : 4 possibilités ;
   - choix de la boule noire : 7 possibilités ;
   - choix des boules rouges : 5^3 possibilités.

   En tout, il y a $4 \times 7 \times 5^3$ possibilités.
5. On considère des ensembles disjoints :
   - A_1 : « 1 boule noire, 3 boules rouges ». $\text{Card}(A_1) = \binom{4}{1} \times 7 \times 5^3$ (choix de la position de la boule noire, choix de la boule noire, choix des trois boules rouges).
   - A_2 : « 2 boules noires, 2 boules rouges ». $\text{Card}(A_2) = \binom{4}{2} \times 7^2 \times 5^2$ (choix des positions des boules noires, choix des boules noires, choix des boules rouges).
   - A_3 : « 3 boules noires, 1 boule rouge ». $\text{Card}(A_3) = \binom{4}{1} \times 7^3 \times 5$ (choix de la position de la boule rouge, choix des trois boules noires, choix de la boule rouge).

   En tout, il y a $\binom{4}{1} \times 7 \times 5^3 + \binom{4}{2} \times 7^2 \times 5^2 + \binom{4}{1} \times 7^3 \times 5$ tirages bicolores.
   Autre solution : On dénombre les tirages tirages où toutes les boules sont toutes de la même couleur :
   - N : « toutes les boules sont noires ». $\text{Card}(N) = 7^4$.
   - R : « toutes les boules sont rouges ». $\text{Card}(R) = 5^4$.

   Finalement, le nombre de tirages bicolores est $12^4 - 7^4 - 5^4$.

II. Tirages successifs et sans remise.

1. Le nombre de tirages correspond au nombre de $4-$arrangements d'un ensemble à 12 éléments, à savoir $12 \times 11 \times 10 \times 9 = \frac{12!}{8!}$ (on choisit la première boule : 12 choix, puis la deuxième boule : 11 choix, etc.).
2. On choisit la première boule rouge (5 possibilités), puis la deuxième (4 possibilités), etc. En tout, il y a $\frac{5!}{1!} = 5!$ possibilités.
3. On dénombre plutôt les tirages ne contenant aucune boule rouge, ce qui revient à ne choisir que des boules noires : il y a $\frac{7!}{3!}$ choix. Donc il y a $\frac{12!}{8!} - \frac{7!}{3!}$ tirages amenant au moins une boule rouge.
4.
   - Choix de la position de la boule noire : 4 possibilités ;
   - choix de la boule noire : 7 possibilités ;
   - choix des boules rouges : $5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{2!}$ possibilités.

   En tout, il y a $4 \times 7 \times \frac{5!}{2!}$ possibilités.
5. On considère des ensembles disjoints :
   - A_1 : « 1 boule noire, 3 boules rouges ». $\text{Card}(A_1) = \binom{4}{1} \times 7 \times \frac{5!}{2!}$ (choix de la position de la boule noire, choix de la boule noire, choix des trois boules rouges).
   - A_2 : « 2 boules noires, 2 boules rouges ». $\text{Card}(A_2) = \binom{4}{2} \times \frac{7!}{5!} \times \frac{5!}{3!}$ (choix des positions des boules noires, choix des boules noires, choix des boules rouges).
   - A_3 : « 3 boules noires, 1 boule rouge ». $\text{Card}(A_3) = \binom{4}{1} \times \frac{7!}{4!} \times 5$ (choix de la position de la boule rouge, choix des trois boules noires, choix de la boule rouge).

   En tout, il y a $\binom{4}{1} \times 7 \times \frac{5!}{2!} + \binom{4}{2} \times \frac{7!}{5!} \times \frac{5!}{3!} + \binom{4}{1} \times \frac{7!}{4!} \times 5$ tirages bicolores.
   Autre solution : On dénombre les tirages tirages où toutes les boules sont toutes de la même couleur :

- N : « toutes les boules sont noires ». $\text{Card}(N) = \frac{7!}{3!}$.
- R : « toutes les boules sont rouges ». $\text{Card}(R) = \frac{5!}{1!} = 5!$.

Finalement, le nombre de tirages bicolores est $\frac{12!}{8!} - \frac{7!}{3!} - 5!$.

III. Tirages simultanés.

1. Le tirage est simultané : on utilise des combinaisons. Il y a $\binom{12}{4}$ tirages possibles.
2. On choisit 4 boules parmi 5 boules rouges : il y a $\binom{5}{4}$ possibilités.
3. Il y a $\binom{7}{4}$ tirages avec uniquement des boules noires, d'où $\binom{12}{4} - \binom{7}{4}$ tirages avec au moins une boule rouge.
4. On choisit les boules rouges ($\binom{5}{3}$ possibilités) puis la boule noire ($\binom{7}{1} = 7$ possibilités). Donc en tout, il y a $\binom{5}{3} \times 7$ choix.
5. Il y a $\binom{7}{4}$ tirages où toutes les boules sont noires, et $\binom{5}{4}$ tirages où toutes les boules sont rouges. Donc il y a $\binom{12}{4} - \binom{7}{4} - \binom{5}{4}$ tirages bicolores.
   Autre solution. On peut utiliser le résultat de II.5. : il y a exactement $\frac{12!}{8!} - \frac{7!}{3!} - 5!$ tirages avec remises qui répondent à la question. La différence dans un tirage simultanée est que l'ordre ne compte pas. Or il y a 4! permutations possibles de 4 boules, donc on a exactement $\frac{1}{4!}(\frac{12!}{8!} - \frac{7!}{3!} - 5!)$ tirages simultanés qui répondent à la question.

. . . .

Exercice 178. Soit A un ensemble fini de cardinal n, et B une partie de A de cardinal p. Dénombrer les parties X de A vérifiant $B \subset X \subset A$.

Corrigé 178. Pour construire une partie X de A vérifiant $B \subset X \subset A$, on peut raisonner par étapes :

- choisir tous les éléments de B : 1 possibilité ;
- choisir une partie de $A \backslash B$: 2^{n-p} possibilités, car $A \backslash B$ est de cardinal $n - p$.

On obtient donc 2^{n-p} parties X de A telles que $B \subset X \subset A$.

. . . .

Exercice 179. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.

1. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans E.
2. Déterminer le nombre d'applications de E dans E qui ne sont pas surjectives.
3. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$.
4. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1, 2\}$.

Corrigé 179.

1. E étant de cardinal fini, on sait qu'une application de E dans E est surjective si et seulement si elle est bijective. Ainsi, le nombre d'applications surjectives de E dans E est le nombre de permutations de E : $n!$.
2. On applique la formule du cardinal du complémentaire. Il y a n^n applications de E dans E dont $n!$ surjectives. Il y a donc $n^n - n!$ applications de E dans E non surjectives.
3. Il y a 2^n applications de E dans $\{0, 1\}$. Parmi celles-ci, celles qui ne sont pas surjectives sont les applications constantes : elles sont au nombre de 2. Il y a donc $2^n - 2$ applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$.
   Autre démarche possible : on dénombre le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$ suivant le nombre d'antécédents de 0 : notons k le nombre d'antécédents de 0 : $k \in [\![1, n-1]\!]$ car l'application est surjective (0 et 1 ont au moins un antécédent). Pour définir l'application, il ne reste qu'à choisir les k antécédents de 0 dans E, les éléments restant auront pour image 1. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces antécédents. Il y a donc $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}$ applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$, avec :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 2^n - 2$$

4. On reprend la démarche précédente : il y a 3^n applications de E dans E. Celles qui ne sont pas surjectives sont celles qui ont pour image l'un des ensembles suivants :

$$\{0\} \qquad \{1\} \qquad \{2\} \qquad \{0,1\} \qquad \{0,2\} \qquad \{1,2\}$$

Il y a exactement une application dont l'image est un ensemble donné de cardinal 1, et d'après la question précédente, $2^n - 2$ applications dont l'image est un ensemble donné de cardinal 2. Puisqu'il y a 3 parties de E de cardinal 1, et 3 parties de cardinal 2, il y a donc $3 + 3 \times (2^n - 2)$ applications de E dans $\{0,1,2\}$ qui ne sont pas surjectives.
Il y a donc $3^n - 3 \times 2^n + 3$ applications surjectives de E dans $\{0,1,2\}$.

. . . .

Exercice 180. On répartit n boules indiscernables dans trois boîtes différentes. Combien y a-t-il de répartitions telles que deux boîtes exactement contiennent des boules ?

Corrigé 180. Dans cet exercice, les boules sont indiscernables, mais les boîtes peuvent être distinguées : numérotons les boîtes.
Pour décrire une répartition des n boules dans les trois boîtes telle que deux boîtes exactement contiennent des boules, raisonnons par étapes :

- choix de la boîte vide : 3 possibilités ;
- choix du nombre de boules de la première boîte non vide (entre 1 et $n-1$) : $n-1$ possibilités ;
- choix du nombre de boules de la seconde boîte non vide (elle reçoit toutes les boules restantes) : 1 possibilité.

Il y a donc $3(n-1)$ répartitions de n boules telles que deux boîtes exactement contiennent des boules.

. . . .

Exercice 181. Une liste palindrome est une liste qui se lit de la même façon à l'endroit ou à l'envers, comme 12321 ou 052250.

1. Combien y a-t-il de listes palindromes à 15 chiffres ?
2. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?
3. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres comportant un chiffre répété et un seul ?
4. Combien y a-t-il de listes formant une suite de 5 chiffres strictement croissantes ?

Corrigé 181.

1. Dans une liste palindrome à 15 chiffres, les 7 chiffres du début sont égaux à ceux de la fin lus à l'envers. Pour construire une liste palindrome à 15 chiffres, on choisit donc $7+1=8$ chiffres dans $[\![0,9]\!]$: il y en a 10^8.
2. Pour construire une telle liste :
   — on choisit la place du 0 dans la liste : 5 places possibles
   — on choisit la valeur de chacun des 4 autres chiffres : 9 possibilités chacun

   Au total : 5×9^4 listes de 5 chiffres contenant une et une seule fois le chiffre 0.
3. Pour construire une telle liste :
   — on choisit le chiffre répété : 10 possibilités
   — on choisit la place des deux chiffres répétés : $\binom{5}{2}$ possibilités
   — on choisit les autres chiffres : $9 \times 8 \times 7$ (on ne peut pas prendre un chiffre déjà choisi)

   Au total, il y a $10 \times \binom{5}{2} \times 9 \times 8 \times 7$ listes de 5 chiffres comportant un chiffre répété et un seul, le chiffre répété étant répété une seule fois. Il reste à dénombrer les listes où le chiffre est répété 3, 4 ou 5 fois.
   Pour un chiffre répété 3 fois :
   — choix du chiffre répété : 10
   — choix de la place des trois chiffres répétés : $\binom{5}{3}$
   — choix des deux autres chiffres : 9×8

ce qui fait $10 \times \binom{5}{3} \times 9 \times 8$ listes comportant un chiffre répété exactement trois fois, et un seul.
De même, on obtient $10 \times 5 \times 9$ listes comportant un chiffre répété exactement quatre fois, et un seul, et 10 listes comportant un chiffre répété 5 fois.
Au final, on obtient :

$$10 \times \binom{5}{2} \times 9 \times 8 \times 7 + 10 \times \binom{5}{3} \times 9 \times 8 + 10 \times 5 \times 9 + 10 = 58060$$

listes comportant un chiffre répété et un seul.

4. Pour construire une telle liste : on choisit 5 chiffres distincts et on les range dans l'ordre croissant. Il y a donc $\binom{10}{5}$ listes de 5 chiffres formant une suite strictement croissante.

. . . .

Exercice 182. On dispose dix jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J.

1. Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire avec ?
2. Combien de mots de dix lettre (ayant un sens ou non) peut-on écrire où B, A et C apparaissent dans ce ordre et côte à côte ?

Corrigé 182.
1. Un mot est une permutation des 10 jetons. Il y a donc 10! mots possibles.
2. Pour former un tel mot :
   — on choisit la place du B : 8 possibilités (il faut pouvoir mettre A et C derrière)
   — les lettres A et C sont alors placés
   — on choisit la place des 7 lettres restantes : 7! possibilités

   Il y a donc $8 \times 7!$ soit 8! mots de 10 lettres où les lettres B, A, C apparaissent dans cet ordre.
   Remarque : on peut aussi les dénombrer en considérant le bloc BAC comme une seule lettre, ce qui mène au même résultat.

. . . .

Exercice 183. Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Corrigé 183. Pour construire une application strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, on choisit les images des éléments de $[\![1, p]\!]$ = on choisit p entiers distincts deux à deux dans $[\![1, n]\!]$, puis on les range dans l'ordre croissant : le plus petit est l'image de 1, le suivant l'image de 2, etc. Il y a donc $\binom{n}{p}$ applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ strictement croissantes.

. . . .

Exercice 184. On se place dans le plan muni du quadrillage $\mathbf{N}^2$. On ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(2, 2)$?
2. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(4, 4)$?
3. Parmi ces chemins, combien y en a-t-il passant par le point $(1, 2)$?

Corrigé 184. Représentons chaque déplacement vers la droite par la lettre D et chaque déplacement vers le haut par la lettre H. Un chemin est alors représenté par un mot composé uniquement des lettres D et H.

1. Pour aller de $(0, 0)$ à $(2, 2)$, il faut se déplacer 2 fois vers la droite et 2 fois vers le haut. Un chemin joignant ces deux points est donc représenté par un mot de 4 lettres composés de 2 D et 2 H. Pour construire un tel mot, on choisit la place des deux D. Les deux H occupent alors les places restantes. Il y a donc $\binom{4}{2}$ chemins joignant ces deux points, ce qui en fait 6.
2. Ici, on doit se déplacer 4 fois vers la droite et 4 fois vers le haut, il y a donc $\binom{8}{4}$ tels chemins, c'est-à-dire 70.
3. Puisqu'on ne peut pas se déplacer vers la gauche ou vers le bas, un tel chemin est composé de deux parties :
   — un chemin joignant le point $(0, 0)$ au point $(1, 2)$: il y en a $\binom{3}{1} = 3$ différents ;
   — un chemin joignant le point $(1, 2)$ au point $(4, 4)$: il y en a $\binom{5}{2} = 10$ différents.

   Au final, il y a 30 chemins joignant $(0, 0)$ à $(4, 4)$ et passant par $(1, 2)$.