
Les nombres réels

Exercice 189. Pour chacun des ensembles suivants, décider s'ils sont majorés ou minorés et, le cas échéant, trouver leur borne supérieure ou inférieure.

$$A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : (n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\}, \quad B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbf{N}^* \right\}, \quad C = \left\{ [x] + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor : x \in \mathbf{R}_+^* \right\}.$$

Exercice 190. 1. Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que :

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

2. Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} : (m, n) \in \mathbf{N}^2 \right\}$$

admet une borne supérieure, une borne inférieure, et les déterminer.

Exercice 191. Prouver l'existence, puis calculer les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

Exercice 192. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction bornée. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$g(x) = \inf \{ f(y) : y \geq x \} \quad \text{et} \quad h(x) = \sup \{ f(y) : y \geq x \}.$$

Déterminer le sens de variation de g et h .

Exercice 193. Donner le domaine de définition et tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto [2x], \quad g : x \mapsto \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}.$$

Exercice 194. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$[x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = [2x].$$

Exercice 195. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

- (1) $[2x] = [5 - x]$.
- (2) $[2x] = [x]^2$.
- (3) $[3x] = 2 - [x]$.

Exercice 196. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$, $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Montrer que f est périodique si et seulement si α est rationnel.

$$x \longmapsto [\alpha x] - \alpha [x]$$

Exercice 197. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor = [x].$$

Exercice 198. Montrer que pour tout nombre réel x , pour tout entier naturel non nul n ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = [nx].$$

Exercice 199. On se propose de calculer la partie entière du réel

$$\alpha = \sum_{k=1}^{100\,000} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire $\lfloor \alpha \rfloor$.

Exercice 200. On définit la **partie fractionnaire** d'un nombre réel x par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Calculer $\{54,465\}$ et $\{-36,456\}$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.
3. Prouver que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto \{x\}$ est périodique, et tracer son graphe.

Exercice 201. 1. Soit $m \in \mathbf{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$.

2. Soit $n \geq 0$. Calculer, en fonction de n ,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Exercice 202. Pour toutes parties A et B de $\mathbf{R}$, on introduit l'ensemble

$$A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$$

1. Déterminer $A + B$ lorsque $A = [0; 1]$ et $B = [0; 1]$.
2. Déterminer $A + B$ lorsque $A =]0; 1]$ et $B = [0; 1[$.
3. Soient A et B deux parties de $\mathbf{R}$ non vides et majorées. Montrer que $A + B$ est une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$, puis comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 203. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbf{R}$. On pose

$$B = \{|x - y| : (x, y) \in A^2\}.$$

Montrer que B admet une borne supérieure et prouver que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 204. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction croissante. Il s'agit de montrer que f admet un point fixe (*i.e.* montrer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = x_0$). Posons $A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \geq x\}$.

1. Justifier l'existence de la borne supérieure de l'ensemble A . On note a cet élément. Montrer que $a \in [0; 1]$.
2. Montrer que $f(A) \subset A$.
3. Montrer que $f(a)$ majore A .
4. En déduire que a est un point fixe de f .
5. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose que f est une fonction croissante de $[0; 1[$ dans $[0; 1[$?