Suites réelles et complexes

Exercice 205. Dans chacun des cas suivants, décider si la suite de terme général u_n est monotone à partir d'un certain rang :

1. $u_n = 2^n - n$;
2. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$;
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n-4}$;
4. $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$;
5. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$;
6. $u_n = \dfrac{2n+3}{n^2}$;
7. $u_n = 2n + \dfrac{1}{5^n}$;
8. $u_n = \dfrac{3^n}{n+1}$;
9. $u_n = 3^n - n + 1$;
10. $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n}}$;
11. $u_n = 2n^2 + 3n - 8$;
12. $u_n = \dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^n}$.

Exercice 206. Dans chacun des cas suivants, dire si la suite de terme général u_n est bornée ou non.

1. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{3n-2}{3n+2}$;
3. $u_n = (-1)^n$;
4. $u_n = n(-1)^n$.

Exercice 207. Représenter graphiquement chacune des suites définies par :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1$;
2. $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.

Exercice 208. On considère la suite u définie par

$$u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}}.$$

Calculer les premiers termes de cette suite, et faire une conjecture sur l'expression du terme général de cette suite en fonction de n. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 209.

1. Déterminer le terme général des suites définies par :
   (a) $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.
   (b) $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 4v_n^3$.
   (c) $w_0 = 0$, $w_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_{n+2} = 6w_{n+1} - 9w_n$.
   (d) $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_{n+2} = 6r_{n+1} - 8r_n + 2$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} r_k$.

Exercice 210. Déterminer le terme général de la suite réelle u définie par :

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - 1$.
3. $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
4. $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 4$.
5. $u_0 = 3$, $u_1 = 4$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.
6. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
7. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
8. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
9. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

10. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.
11. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. Montrer qu'on peut écrire le terme général sous la forme $u_n = A\cos(n\theta + \phi)$, où A, θ et ϕ sont des réels à préciser. Montrer que u est périodique de période 3.
12. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
13. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.
14. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 211. On note E l'ensemble des suites réelles u vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2.$$

1. Montrer que E contient une suite de la forme $(an^2 + bn + c)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.
2. En déduire l'expression du terme général d'une suite d'éléments de E.
3. Montrer qu'il existe une unique suite u dans E vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, et donner l'expression de son terme général.

Exercice 212. Montrer, en revenant à la définition, que la suite u de terme général $u_n = \sqrt{\frac{2}{n}}$ converge vers 0, que la suite v de terme général $v_n = \frac{n+1}{n+3}$ converge vers 1 et que la suite w de terme général $w_n = 2^n - 3\cos(n)$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 213 (*Critère de D'Alembert*). Soit u une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel k tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

1. Montrer que si $k < 1$, alors u converge vers 0.
2. Montrer que si $k > 1$, alors u diverge vers $+\infty$.

Exercice 214. Déterminer, si elles existent, les limites des suites de terme général :

(1) $\dfrac{1}{n+2}$;
(2) $\dfrac{n^2 - 5n}{3n^2 + 4n^3}$;
(3) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;
(4) $\sqrt{n+3} - \sqrt{n}$;
(5) $\dfrac{2^n}{n^6 + n^3 + 1}$;
(6) $\dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n}}{4 + \mathrm{e}^n}$;
(7) $\dfrac{\mathrm{e}^{2n} + 3}{(\mathrm{e}^n + 5)^2}$;
(8) $\dfrac{2^n + 3^n}{4 \cdot 2^n - 3^{n+1}}$;
(9) $\dfrac{10^{n+3}}{n + 3^{2n+1}}$;
(10) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$;
(11) $\sqrt{n^2+1} - n$;
(12) $\left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-n^2}$;
(13) $(-1)^n$;
(14) $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$;
(15) $n + (-1)^n\sqrt{n}$;
(16) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+p)^2}$;
(17) $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$;
(18) $\dfrac{1}{n}\lfloor\sqrt{n}\rfloor$;
(19) $\dfrac{\cos(n^3)}{n^2}$;
(20) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 215. Déterminer la limite de la suite u de terme général $u_n = (1+2^n)^{\frac{1}{n}}$. Plus généralement, si $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$, étudier la limite de la suite u de terme général $u_n = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 216. Soit E une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$. Notons m la borne supérieure de cet ensemble. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E qui converge vers m.

Exercice 217. Trouver un équivalent simple des suites de terme général :

(1) $\dfrac{n^4 + 2n^3 - 1}{3n+2}$;
(2) $\exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$;
(3) $\dfrac{n^2\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$;
(4) $\sqrt{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$;
(5) $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} + \dfrac{1}{4n^2}$;
(6) $3 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \dfrac{6}{n}$;
(7) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)}$;
(8) $(n + \ln(n))\,\mathrm{e}^{-n+1}$;
(9) $\ln(n+1) - \ln(n+2)$;
(10) $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$;
(11) $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;
(12) $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right) + \tan\left(\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 218. Donner la factorisation de $a^3 - b^3$ par $a - b$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. En déduire la limite de la suite u de terme général $u_n = (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$. Retrouver ce résultat en utilisant les équivalents usuels.

Exercice 219. En utilisant les équivalents, déterminer les limites, si elles existent, des suites de terme général :

(1) $\ln(n)\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n^2}\right)\right)$;

(2) $n \ln n - \dfrac{n^2+1}{\ln n} + \sqrt{n+3}$;

(3) $\dfrac{\ln(n^4 + n^2 + 1)}{n+3}$;

(4) $\dfrac{\ln(1 + \sin\frac{1}{n})}{\sqrt{1 - \cos\frac{1}{n}}}$;

(5) $\left(\exp\left(\sin\dfrac{1}{n}\right) - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln(n^3 + n)$;

(6) $n^3(\exp(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-n}})$.

Exercice 220. Soient u et v deux suites de nombres réels appartenant à $[0\,;\,1]$ telles que la suite uv converge vers 1. Montrer que les suites u et v convergent également vers 1. On pourra chercher à utiliser le théorème des gendarmes après avoir encadré la suite u.

Exercice 221. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire un encadrement du terme $\ln(u_n)$, où $n \in \mathbf{N}^\star$.
3. Monter que la suite de terme général $\ln(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
4. Conclure.

Exercice 222. On considère la suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. La suite u peut-elle être convergente ? A-t-elle une limite ? Si oui, la préciser.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = u_n - \ln(n)$ et $w_n = u_n - \ln(n+1)$.
   (a) Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que les suites v et w sont adjacentes.
4. En déduire un équivalent de u.

Exercice 223. Soit u une suite d'entiers. On suppose que u converge. Montrer que u est stationnaire.

Exercice 224. Soit u une suite réelle.

1. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. La suite u converge-t-elle ?
2. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite. La suite u converge-t-elle ?
3. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. La suite u converge-t-elle ?

Exercice 225. On introduit les suites u et v de termes généraux respectifs $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que les suites u et v sont adjacentes. Qu'en déduit-on ?
2. Donner un terme de la suite u qui fournit une approximation à 10^{-6} près de la limite ℓ de u.
3. Déterminer à l'aide de votre calculatrice une approximation à 10^{-3} près de ℓ.
4. Étudier $\sqrt{6\ell}$. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 226. Montrer que la suite s de terme général

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

converge. On pourra montrer que les suites extraites $(s_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 227. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les deux suites ainsi définies sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite ℓ.
2. Donner un terme de u qui fournit une approximation de ℓ à 10^{-3} près. A l'aide de votre calculatrice, trouver cette approximation et conjecturer la valeur de ℓ.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que ℓ est irrationnel.

Exercice 228. Introduisons $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x$ définie sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution réelle. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est monotone.
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, puis déterminer celle-ci.

Exercice 229. On considère l'équation $(E_n) : x^n - x - 1 = 0$, où $n \geqslant 2$. On introduit, pour $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto x^n - x - 1$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,; +\infty[$; on note x_n cette solution.
2. Déterminer, pour $n \geqslant 2$, le signe de $f_n(x_{n+1})$, et en déduire le sens de variation de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
4. En remarquant que $x_n = (1 + x_n)^{\frac{1}{n}}$, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 230. Pour tout entier n non nul, on définit la fonction polynomiale $p_n : x \longmapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, p_n possède un unique zéro réel, que l'on note x_n. Déterminer $\lfloor x_n \rfloor$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geqslant 2$, déterminer le signe de $p_n(x_{n-1})$, et en déduire la monotonie de la suite (x_n).
3. Justifier que (x_n) converge.
4. On note ℓ la limite de (x_n). Montrer que $x_n - \ell \sim \frac{1}{n}$.
5. En réitérant le procédé, montrer qu'on a le développement asymptotique $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \mathrm{o}\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

Exercice 231. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \big]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\big[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $\tan(x_n) = x_n$.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$. En donner un équivalent simple.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$. Justifier que $y_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$. Quelle est la limite de (y_n) ?
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $z_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Donner un équivalent simple de (z_n).

Exercice 232. Montrer, dans chacun des cas suivants, que la suite u admet une limite et la déterminer.

1. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.
2. $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
3. $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

Exercice 233. Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, l'équation
$$x^n = a(1 - x)$$
possède une et une seule solution dans l'intervalle $]0\,; 1[$, que nous noterons u_n.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.
3. Montrer que la suite u est convergente, et déterminer sa limite.
4. Introduisons la suite $v = 1 - u$. Montrer que
$$\ln(v_n) \sim -nv_n \quad \text{puis} \quad \ln(v_n) \sim -\ln(n).$$
En déduire que $v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 234. Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer que la suite u admet une limite et déterminer celle-ci.
2. Justifier rapidement l'inégalité $\ln(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$.
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}\setminus\{0,1\}$, $u_n \leqslant \ln(2n)$.
4. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.
5. Montrer enfin que $u_n - \ln(n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 235. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres réels vérifiant, pour tout entier naturel n,

$$2u_{n+1} \leqslant u_{n+2} + u_n$$

On introduit la suite v de terme général

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Le but de l'exercice est de montrer que la suite v converge vers 0.

1. Traduire le fait que la suite u est bornée.
2. Montrer que la suite v est majorée et croissante. Elle converge donc vers un nombre réel, que nous noterons ℓ.
3. Dans cette question, on suppose $\ell > 0$.
   (a) Montrer que $v_n \geqslant 0$ au delà d'un certain rang.
   (b) En déduire que la suite u est croissante au delà d'un certain rang.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite u ?
   (d) Montrer que l'on aboutit à une contradiction.
4. Dans cette question, on suppose $\ell < 0$. En suivant le même raisonnement que précédemment, montrer qu'il y a contradiction.
5. Conclure.

Exercice 236. Classer par ordre de négligeabilité, lorsque c'est possible les suites de terme général :

(a) n ; $n+2$; $\frac{1}{n}$; $\ln(n)$; $\ln(n+2)$; e^n ; e^{n+2} ; $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$; $\frac{1}{n+\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$; 0.

(b) n^2 ; $\ln(n)$; 10^n ; e^n ; $\ln(n)^{10}$; e^{2n} ; $\sqrt{\ln(n)}$; $\ln(n^2)$.

Exercice 237. Déterminer, si elles existent, les limites des suites de terme général :

(a) $\mathrm{e}^{-n} + \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} + i\sqrt{\dfrac{4n^2+5}{2n^2-n}}$;

(b) $\left(\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$;

(c) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{in\frac{\pi}{3}}$;

(d) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{in\frac{\pi}{3}}$;

(e) $(n+1)\,\mathrm{e}^{i\left(2+\frac{1}{n}\right)}$;

(f) $\left(1+\dfrac{i\pi}{n}\right)^n$.

Exercice 238. On considère la suite z de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 \in \mathbf{C}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad z_{n+1} = 2z_n - \overline{z_n}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_0 pour que la suite z converge.

Exercice 239. Soit z une suite de nombres complexes vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

1. Montrer que si $z_0 \in \mathbf{R}$, la suite z converge, et déterminer sa limite.
2. On suppose désormais que z_0 n'est pas réel.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un couple $(r_n, \theta_n) \in \mathbf{R}_+^\star \times (]-\pi\,;0[\,\cup\,]0\,;\pi[)$ tel que $z_n = r_n\mathrm{e}^{i\theta_n}$. Préciser une relation de récurrence entre (r_{n+1}, θ_{n+1}) et (r_n, θ_n). En déduire une expression explicite du terme général de la suite θ, en fonction de θ_0.

(b) Montrer que la suite de terme général $r_n \sin(\theta_n)$ est une suite géométrique. En déduire une expression du terme général de cette suite en fonction de r_0 et θ_0.

(c) Montrer que la suite z converge, vers une limite à préciser.

Exercice 240. Introduisons $f : x \longmapsto x - \ln x$ définie sur $\mathbf{R}_+^\star$.

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
Montrer que $f(\mathbf{R}_+^\star) \subset [1\,;+\infty[$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star$. Soit u la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$.
   (a) A l'aide des graphes précédemment tracés, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite u dans le cas $a = 2$. Émettre une conjecture sur le comportement de u dans les cas $a < 1$ et $a \geqslant 1$.
   (b) Pour quelle valeur de a la suite u est-elle constante ?
   (c) Dans cette question, on suppose $a > 1$.
      i. Montrer que tous les termes de la suite sont supérieurs à 1.
      ii. Montrer que la suite u est monotone.
      iii. En déduire sa nature, et la valeur de sa limite.
   (d) On suppose à présent que $a < 1$. Quelle est la nature de la suite ?

Exercice 241. 1. Etudier la nature de la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

2. Etudier la nature de la suite v définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n^2 + v_n}{2}$.

Exercice 242. Etudier la suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x-1} \end{array}$.

Exercice 243. Soit u une suite de premier terme u_0 vérifiant $u_0 \in [-1\,; 0]$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - 1.$$

Montrer que la suite u diverge excepté pour une valeur de u_0 que l'on précisera.

Exercice 244. Soit $x > 0$. On définit une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ par $u_1 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{n + u_n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que si $u_n \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \leqslant 1$, et que si $u_n \leqslant 1$, alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n \leqslant \dfrac{2}{n-1}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et donner sa limite.
5. Donner un équivalent simple de u.
6. On pose $v_n = nu_n - 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$. On admettra que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{2n^2 + n^2 v_n + n + nv_n - v_n^2 - 2v_n - 1}{n^3 + v_n^2 + 2v_n + 1}.$$
En déduire un équivalent simple de v.
7. Donner un développement asymptotique à deux termes de u (autrement dit, déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $u_n = P\left(\dfrac{1}{n}\right) + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$).