Suites récurrentes

Exercice 240. Introduisons $f : x \longmapsto x - \ln x$ définie sur $\mathbf{R}_+^\star$.

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
   Montrer que $f(\mathbf{R}_+^\star) \subset [1\,;+\infty[$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star$. Soit u la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$.
   (a) A l'aide des graphes précédemment tracés, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite u dans le cas $a = 2$. Émettre une conjecture sur le comportement de u dans les cas $a < 1$ et $a \geqslant 1$.
   (b) Pour quelle valeur de a la suite u est-elle constante ?
   (c) Dans cette question, on suppose $a > 1$.
      i. Montrer que tous les termes de la suite sont supérieurs à 1.
      ii. Montrer que la suite u est monotone.
      iii. En déduire sa nature, et la valeur de sa limite.
   (d) On suppose à présent que $a < 1$. Quelle est la nature de la suite ?

Exercice 241. 1. Etudier la nature de la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.
2. Etudier la nature de la suite v définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n^2 + v_n}{2}$.

Exercice 242. Etudier la suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x-1} \end{array}$.

Exercice 243. Soit u une suite de premier terme u_0 vérifiant $u_0 \in [-1\,;0]$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - 1.$$

Montrer que la suite u diverge excepté pour une valeur de u_0 que l'on précisera.

Exercice 244. Soit $x > 0$. On définit une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ par $u_1 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{n + u_n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que si $u_n \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \leqslant 1$, et que si $u_n \leqslant 1$, alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n \leqslant \dfrac{2}{n-1}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et donner sa limite.
5. Donner un équivalent simple de u.
6. On pose $v_n = nu_n - 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$. On admettra que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{2n^2 + n^2 v_n + n + nv_n - v_n^2 - 2v_n - 1}{n^3 + v_n^2 + 2v_n + 1}.$$

   En déduire un équivalent simple de v.
7. Donner un développement asymptotique à deux termes de u (autrement dit, déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $u_n = P\left(\dfrac{1}{n}\right) + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$).