
Systèmes d'équations linéaires

Exercice 245. Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 8x + 2y - z = 5 \\ x - 3y + t = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y + z - u = 0 \\ 2x + y - z + 2u = 0 \\ 2y + 3z + u = 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Exercice 246. En discutant suivant la valeur des nombres réels a , b et c , résoudre les systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 5y + z = 1 \\ 3x + 2y + 7z = a \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y + z + t = a \\ -x + 2y + 2t = b \\ 2x - y - z + 2t = c \end{cases}$$

Exercice 247. Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon la valeur du paramètre m :

$$(a) \begin{cases} 2mx + y = 1 \\ 2x + my = m \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} (1 - m)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3 + m)y + 3z = 0 \\ x + y - (2 + m)z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y + z + mt = 0 \\ mx + z + t = 0 \\ x + my + t = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 248. Déterminer une équation ou un système d'équations cartésiennes des ensembles A et B suivants :

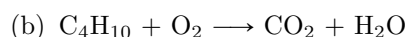
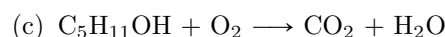
$$A = \{(1 - 2s + 3t, -2 + s + t, 4 - s - 2t) : (s, t) \in \mathbf{R}^2\} \quad \text{et} \quad B = \{(1 + 2t, 2 - t, -1 + t) : t \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 249. Existe-t-il un polynôme P de degré 3 vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$? Est-il unique ?

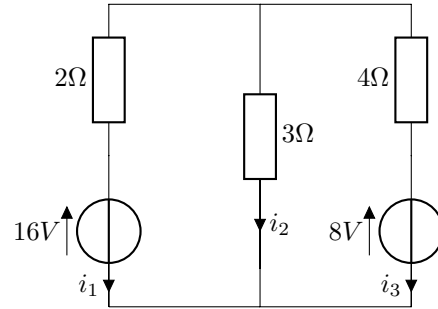
Exercice 250. Montrer qu'il existe un unique triplet de réels (a, b, c) vérifiant pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{2, 3\}$,

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 2)(x - 3)^2} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x - 3} + \frac{c}{(x - 3)^2}.$$

Exercice 251. Equilibrer les réactions chimiques suivantes :



Exercice 252. A l'aide de la loi des mailles, déterminer les intensités i_1 , i_2 et i_3 dans le circuit électrique ci-contre.



Exercice 253. Soit $m \in \mathbf{R}$. On considère les trois droites du plan d'équations respectives :

$$D_1 : 2x - 5y = 3 \quad \text{et} \quad D_2 : -x + 3y = m \quad \text{et} \quad D_3 : 3x - 7y = 3m + 1.$$

Déterminer m pour que ces trois droites soient concourantes et donner alors les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 254. Soit $m \in \mathbf{R}$. On considère les droites de l'espace d'équations respectives

$$D : \begin{cases} x + my + z = 1 \\ x - y + 2z = 2m \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} mx + y - z = -1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour ces droites soient sécantes, et déterminer alors leur point d'intersection.

Exercice 255. Dans l'espace, on considère le plan P défini par les points $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -6, -1)$ et $C(2, 2, 2)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de P , puis une équation cartésienne de P .

Exercice 256. Dans l'espace, donner une écriture paramétrique de la droite $D : \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$.

Exercice 257. Dans l'espace, on considère la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

Décrire cette droite comme intersection de deux plans.

Exercice 258. Dans l'espace, on considère le plan P d'équation $x + 2y + mz = m - 4$, et la droite D d'équations $\begin{cases} x + my - 2mz = 0 \\ 2y - 3z = -3 \end{cases}$. Montrer qu'il existe une valeur du paramètre réel m telle que D soit contenu dans P .

Exercice 259. Décrire par équations les ensembles suivants :

$$E = \{(x + 2y - z + t, 2x + y + z + 3t, -5x + 2z) : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4\}$$

$$F = \{(x + y + 3z, x + 2y + 4z, 3y + 3z) : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}.$$

Exercice 260. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, surjective, et donner une description de son image par équations.

$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 & f_2 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (-x, 3y + x) & (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + 3z, 3x + 2y + z, 7x + 2y - 3z) \\ f_3 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2 & f_4 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + y, 1) & (x, y, z) \longmapsto (2x - 4y + 10z, 4x - 5y + 8z, -2x + y + 2z) \end{array}$$