Calcul matriciel

Exercice 260. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque cela a un sens :

$$3A \quad ; \quad A+B \quad ; \quad B+2C \quad ; \quad AB \quad ; \quad BA \quad ; \quad BC \quad ; \quad BAC.$$

Exercice 261. Trouver les matrices A vérifiant

$$A \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 5I_2 = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 21 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 262.

1. Soient A et B deux matrices diagonales de même taille. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Montrer que les matrices $A + \lambda B$ et AB sont encore diagonales.
2. Reprendre la question précédente en remplaçant « diagonales » par « triangulaires supérieures ».

Exercice 263. Démontrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 264. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice N telle que $MN = I_3$?

Exercice 265. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont tous nuls excepté celui situé sur la ligne i et la colonne j qui vaut 1.
Discuter le résultat du produit $E_{i,j} \times E_{i',j'}$, selon les valeurs des paramètres i, i', j, j' éléments de $[\![1,n]\!]$.

Exercice 266.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients d'une matrice diagonale pour que celle-ci soit inversible.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients d'une matrice triangulaire pour que celle-ci soit inversible.

Exercice 267. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$. On note D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Pour tout entier naturel k, donner l'expression de D^k en fonction de k.

Exercice 268.

1. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbf{K}^4$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A^2 - (a+d)A$.
   (b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les scalaires a, b, c, d la matrice A est-elle inversible ? Lorsque A est inversible, exprimer A^{-1} à l'aide de a, b, c, d.
2. Supposons $ad - bc \neq 0$. Soit $(e,f) \in \mathbf{K}^2$. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{array} \right.$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 269. Inverser les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 270. On considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M^3 - 3M^2 - 4M$.
2. En déduire que M est inversible.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des nombres réels a_n, b_n et c_n tels que :
$$M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I_3.$$

Exercice 271. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

Exercice 272.
1. Pour la matrice A suivante, calculer A^n, pour tout entier naturel n :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Posons $B = A + I_3$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer B^n pour tout entier naturel n.

Exercice 273. Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ telle que $A^T A = 0$. Montrer que $A = 0$. Ce résultat est-il encore valide pour une matrice à coefficients complexes ?

Exercice 274. On considère l'ensemble
$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K}) \mid \exists (a, b) \in \mathbf{K}^2,\ M = \begin{pmatrix} -(a+b) & b & a \\ a & -(a+b) & b \\ b & a & -(a+b) \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer qu'il existe deux matrices A et B telles que E soit l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux matrices.
2. Prouver que A^2, AB, BA et B^2 appartiennent à E. En déduire que E est stable par multiplication, c'est-à-dire que pour tous $M, N \in E$, $MN \in E$.
3. Existe-t-il dans E des matrices dont l'inverse appartient encore à E ?

Exercice 275.
1. On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 + a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1 + a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
2. Soit u, v, w les suites définies par la donnée de $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 1$ et les relations de récurrence :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n, \quad w_{n+1} = u_n + v_n + w_n.$$
   Déterminer, à l'aide de la matrice A, l'expression des termes généraux de ces trois suites.

Exercice 276. On note J la matrice carrée d'ordre $n \in \mathbf{N}^\star$ dont tous les coefficients valent 1.
1. Déterminer l'unique matrice échelonnée réduite en lignes équivalente par ligne à la matrice J.
2. Pour tout entier naturel non nul p, calculer J^p.
3. Soit $\mathcal{E} = \{I + \alpha J \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, $AB \in \mathcal{E}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la matrice $I + \alpha J$ admet-elle un inverse dans $\mathcal{E}$?
   (b) En déduire l'inverse de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
   (c) A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout entier naturel n.