Limites et continuité

Exercice 277. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbf{R}$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 278. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité (si possible) au voisinage de $+\infty$:

$$x \longmapsto x^2 e^x \qquad x \longmapsto x + x^2 \qquad x \longmapsto \frac{x^2}{\ln(x)} \qquad x \longmapsto x^3 \ln(x)$$

$$x \longmapsto \frac{e^x}{x\ln(x)} \qquad x \longmapsto x + \ln(\sqrt{x}) \qquad x \longmapsto \frac{x^2}{x+\ln(x)} \qquad x \longmapsto x^2 \ln^2(x)$$

Exercice 279. Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes au point indiqué :

(a) $x \longmapsto x - 2\sqrt{x}$ en $+\infty$;
(b) $x \longmapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$;
(c) $x \longmapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0 ;
(d) $x \longmapsto \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ en $+\infty$;
(e) $x \longmapsto (\frac{\ln x}{x})^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$;
(f) $x \longmapsto \frac{x^3\ln(x)+e^x}{\ln(x)^2+x^2}$ en $+\infty$;
(g) $x \longmapsto \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ en 0 ;
(h) $x \longmapsto \frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+1}\sin(\frac{1}{x})$ en $+\infty$;
(i) $x \longmapsto \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$;
(j) $x \longmapsto \cos(x + \frac{1}{x})$ en $+\infty$;
(k) $x \longmapsto \frac{e^{3x+1}}{\ln(x)^4}$ en $+\infty$;
(l) $x \longmapsto \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ en 0^+ ;
(m) $x \longmapsto \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ en 0 ;
(n) $x \longmapsto x\ln(\frac{x+1}{x-1})$ en $+\infty$.

Exercice 280. Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes, au point indiqué :

(a) $x \longmapsto \frac{x^3+3x^2-2}{3x^2-5x+6}$ en $+\infty$, puis en 0 ;
(b) $x \longmapsto \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ en $\frac{\pi}{4}$;
(c) $x \longmapsto \frac{x^5+2x^3}{3x^2+4x}$ en 0 ;
(d) $x \longmapsto \ln(1 + x^2 + 5x^4)$ en 0 puis en $+\infty$;
(e) $x \longmapsto \lfloor x^2 \rfloor$ en $+\infty$;
(f) $x \longmapsto \ln(1 + x^2) + \cos x$ en $+\infty$ puis en 0 ;
(g) $x \longmapsto \ln(x)$ en 1 ;
(h) $x \longmapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3}$ en 0, en $+\infty$ puis en -1 ;
(i) $x \longmapsto \sin(3x^2) + \ln(1 + 2x)$ en 0 ;
(j) $x \longmapsto \sin(e^{-x})$ en $+\infty$;
(k) $x \longmapsto \ln(5x^2 + e^{2x})$ en $+\infty$ puis en 0 ;
(l) $x \longmapsto \dfrac{e^{x^2} + 3x^2}{x^5 + \ln x}$ en $+\infty$ puis en 0.

Exercice 281. Calculer les limites suivantes en utilisant des équivalents :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\ln(1+x^2)}{x^2\tan(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^3}\right) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{4^x-1}{3^x-1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(5x))}$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{ch}(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} \qquad \lim_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x)\tan(2x) \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x) \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x \ln(1+\ln(1+x)) \qquad \lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(e^{\cos x - 1} - 1)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\ln x}{x^x - 1} \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$$

Exercice 282. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

$$\lim_{x\to 0} x^{10}\exp(\frac{1}{x}) \qquad \lim_{x\to 0} x^3 \mathrm{e}^{\frac{\cos(x)}{x}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty}(\ln(x)+\sin(x))^2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^{\sin x}+x^2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} x^x \qquad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 283. Déterminer l'ensemble de définition, puis les asymptotes éventuelles des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}, \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}, \qquad f_3 : x \longmapsto \frac{x^2-1+\ln x}{x-1}.$$

Exercice 284. Soit $f : \mathbf{R}_+^\star \longrightarrow \mathbf{R}$ une application croissante, non identiquement nulle, et vérifiant :

$$\forall (x,y)\in(\mathbf{R}_+^\star)^2, \qquad f(xy)=f(x)+f(y).$$

Montrer que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, puis que f admet $-\infty$ comme limite en 0. Quel résultat intéressant est ainsi démontré ?

Exercice 285. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si} \quad x<-2\\ a & \text{si} \quad x=-2\\ (2x+b)^2 & \text{si} \quad x>-2\end{cases}$$

soit continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 286. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$|f(x)|\leqslant|\sin(x)|.$$

Cette application est-elle continue en 0 ?

Exercice 287. Soit $f : \begin{array}{ccc}]0\,;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}\end{array}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice 288. Donner le domaine de définition et étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \lfloor x\rfloor + (x-\lfloor x\rfloor)^2, \qquad g : x \longmapsto \sqrt{(x-1)\ln(x^2-3x+2)}.$$

Exercice 289. Déterminer le domaine de définition puis prolonger par continuité en 0 la fonction $f : x \longmapsto (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 290. Soit $n\in\mathbf{N}$. Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité en les extrémités finies de leur intervalle de définition ?

(1) $a : \begin{array}{ccc}]-1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3+6x+7}{x^3+1}\end{array}$

(2) $b : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(1+x)^n-1}{2x}\end{array}$

(3) $c : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}\end{array}$

(4) $d : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2+2^{\tan x}}\end{array}$

(5) $e : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\frac{1}{x})\end{array}$

(6) $f : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\sin(\frac{1}{x})\end{array}$

Exercice 291. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple explicite.

1. Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de $+\infty$. Si f est strictement positive au voisinage de $+\infty$, alors la limite de f en $+\infty$, si elle existe, est strictement positive.
2. Soit $a\in\overline{\mathbf{R}}$ et f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de a, sauf peut-être en a. Si f est bornée au voisinage de a, alors f admet une limite finie en a.
3. Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, alors f est décroissante au voisinage de $-\infty$.

4. Soit f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}_+^\star$ définies sur un intervalle I non vide et non réduit à un point. Soit $a \in \overline{I}$. On suppose que f et g sont équivalentes en a et que f tend vers $+\infty$ en a. Alors les fonction $\ln \circ f$ et $\ln \circ g$ sont équivalentes en a.
5. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur une intervalle I non vide et non réduit à un point. Soit $a \in \overline{I}$. On suppose que f et g sont équivalentes en a et que f est bornée au voisinage de a. Alors g est bornée au voisinage de a.

Exercice 292. Soit f une fonction continue en 0 vérifiant pour tout nombre réel x,

$$f(x) = f(2x).$$

Monter que f est constante.

Exercice 293. Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I. On suppose que $f(I)$ est un ensemble de cardinal au plus 2. Montrer que f est constante.

Exercice 294. Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\forall q \in \mathbf{Q}, \quad f(q) = g(q).$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 295. Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle I. On suppose que

$$|f| = |g|$$

et que f ne s'annule pas. Montrer que $f = g$ ou que $f = -g$.

Exercice 296. On cherche à déterminer l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2x+1) = f(x)$.

1. On considère une suite u définie par la donnée de son premier terme $u_0 = x \in \mathbf{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}.$$

   (a) Montrer que u converge et déterminer sa limite.

   (b) Soit $f \in E$. Montrer que la suite de terme général $f(u_n)$ est constante. En déduire que f est une fonction constante.

2. Conclure.

Exercice 297. Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur $\mathbf{R}$. On note $\max(f, g)$ la fonction $x \longmapsto \max\{f(x), g(x)\}$. Montrer que

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

En déduire que $\max(f, g)$ est une fonction continue. Adapter le raisonnement pour montrer que la fonction $\min(f, g)$ définie de manière analogue est continue.

Exercice 298. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 299. Montrer que toute fonction polynomiale de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de degré impair s'annule au moins en un point.

Exercice 300. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbf{R}$, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$. Admet-elle un maximum, un minimum ?

Exercice 301. Montrer qu'une application continue d'un segment dans lui-même admet nécessairement un point fixe. Y a-t-il unicité du point fixe ? Le résultat est-il vrai pour un intervalle quelconque ?

Exercice 302. Soit f une fonction numérique définie et continue sur un segment $[a\,;\,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a\,;\,b]$ tel que :

$$2f(a) + 3f(b) = 5f(c).$$

Exercice 303. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0\,;\,2]$ vérifiant $f(0) = f(2)$. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;\,1]$ tel que $f(c) = f(c+1)$.

Exercice 304. Soit f une fonction numérique et continue sur $\mathbf{R}$, périodique de période T. Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes.
2. Prouver l'existence d'un nombre réel c tel que $f(c) = f(c+a)$.

Exercice 305. Montrer que la fonction f définie sur $]0;1]$ par $f(x) = (1-x)\sin\dfrac{\pi}{x}$ est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 306. Soit f une fonction numérique et continue sur $[0\,;\,1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Soit $p \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout $x \in \left[0\,;\,1-\frac{1}{p}\right]$, on pose :

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{p}\right) - f(x).$$

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{k}{p}\right)$.
2. En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, l'équation
$$f\left(x+\frac{1}{p}\right) = f(x)$$
admet au moins une solution dans $\left[0\,;\,1-\frac{1}{p}\right]$.

Exercice 307 (*Équation fonctionnelle de Cauchy*). Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des applications continues f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Soit $f \in E$.
   (a) Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est impaire.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = nf(1)$. Montrer que cette relation est encore valable pour $n \in \mathbf{Z}$.
   (c) Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
   (d) En déduire, à l'aide de la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = xf(1)$.
2. Montrer que $E = \{x \mapsto a\,x \mid a \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 308. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur le segment $[0\,;\,1]$, à valeurs dans $[0\,;\,1]$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Le but de l'exercice est de démontrer que les graphes de f et g ont un point commun.
Pour cela, on suppose qu'il existe pas de nombre réel α appartenant à $[0\,;\,1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

1. Démontrer que f admet au moins un point fixe sur $[0\,;\,1]$. Par suite, a désigne un point fixe de f.
2. Montrer que la fonction $f - g$ est de signe constant.
3. On introduit la suite u définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n est un point fixe de f.
   (b) En déduire que la suite u est monotone.
   (c) Montrer que la suite u converge, vers un nombre réel de $[0\,;\,1]$ que nous noterons ℓ.
   (d) Démontrer que ℓ est à la fois un point fixe de f et de g.
4. Conclure.

Exercice 309. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R};\mathbf{R})$. On suppose que f admet des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$. Admet-elle un maximum ? un minimum ?

Exercice 310. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R};\mathbf{R})$. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 311. Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$. On suppose que $f > g$ sur $[a;b]$. Montrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant g(x) + m$.

Exercice 312. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.
On suppose que f^2 est constante sur I. Montrer que f est constante sur I.

Exercice 313. Soit $f \in \mathscr{C}([0;1];\mathbf{R})$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, on pose $\alpha_k = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$. Que peut-on en déduire concernant le signe de $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$?

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $a \in [0; 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(a + \frac{1}{n}) = f(a)$.
3. Donner un exemple de fonction pour laquelle on a pour tout $x \in [0; 1 - \frac{2}{3}]$, $f(x + \frac{2}{3}) \neq f(x)$
4. Application : un cycliste parcourt 24 kilomètres en 1 heure (sa vitesse n'étant pas forcément constante). Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi heure pendant lequel il a parcouru exactement 12 kilomètres (de même, il existe un intervalle d'un quart d'heure pendant lequel il a parcouru 6 kilomètres, mais pas nécessairement un intervalle de 20 minutes pendant lesquelles il a parcouru 16 kilomètres).

Exercice 314. On considère la fonction f définie sur $I = [-1\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^3}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur I, et démontrer que sa bijection réciproque, notée g, est continue sur I.
2. Montrer que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$, puis déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 315. 1. Montrer que pour tout nombre réel x strictement supérieur à e, l'équation

$$y - x\ln(y) = 0$$

d'inconnue $y \in]x\,; +\infty[$, admet une unique solution. Pour tout $x > \mathrm{e}$, on note $f(x)$ cette solution.

2. Montrer que la fonction f ainsi définie sur $]\mathrm{e}\,; +\infty[$ admet une limite en $+\infty$, et déterminer celle-ci.
3. Prouver que f est une fonction croissante.

Exercice 316. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des fonctions à valeurs réelles f définies et continues sur $\mathbf{R}_+$ et vérifiant la condition suivante :

$$\forall (x, n) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{N}^\star, \quad f(x) = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n. \tag{C}$$

1. Soif $f \in E$.
   (a) Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$.
   (b) Prouver que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$.
   (c) Dans cette question, on suppose qu'il existe un nombre réel positif x_0 en lequel f s'annule. Prouver que la suite de terme général $f(\frac{x_0}{n})$ converge vers $f(0)$ et en déduire que $f(0) = 0$.
   (d) Dans cette question, on suppose qu'il existe un nombre réel positif x_0 en lequel f ne s'annule pas. En s'inspirant du raisonnement précédemment mené, prouver que $f(0) = 1$.
   (e) En déduire que $f = 0$ ou que f ne s'annule jamais.
2. Soit $f \in E \backslash \{0\}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et pour tout $q \in \mathbf{N}^\star$,
   $$f\left(\frac{x}{q}\right) = (f(x))^{\frac{1}{q}}.$$
   (b) Montrer alors que pour tout nombre rationnel strictement positif r,
   $$f(r) = (f(1))^r.$$
   (c) En déduire que $f(x) = f(1)^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$.
3. Prouver que
   $$E = \{x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x} \;:\; \alpha \in \mathbf{R}\} \cup \{x \longmapsto 0\}.$$
4. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbf{R}_+$, partout discontinue, mais vérifiant la condition (C).