
Dérivabilité

Exercice 317. Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Que peut-on dire de f' si f est paire (resp. impaire, resp. périodique)? Examiner la réciproque dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 318. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f_1 : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^2); & f_2 : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x\sqrt{1-x}); & f_3 : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{1+x}\right); \\ f_4 : x \mapsto \frac{\ln(1+\operatorname{ch}(2x))}{x}; & f_5 : x \mapsto 3^{4x^2-1}; & f_6 : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{2\sin x - 1}}. \end{array}$$

Exercice 319. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto ||x - 1| - 2|$.

Exercice 320. Déterminer si les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbf{R}$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -4x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad g : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 321. Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur $[0; 1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Introduisons la fonction g définie sur $[0; 1]$ par :

$$g(x) = f(2x) \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad g(x) = f(2x-1) \text{ sinon.}$$

Montrer que g est une fonction continue. Est-elle dérivable sur $[0; 1]$?

Exercice 322. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = x^n|x|$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

Exercice 323 (Formule de Leibniz). Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I . Montrer que la fonction fg est n fois dérivable sur I et démontrer la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exercice 324 (Formule de Vandermonde). Soit n un entier naturel. On définit sur $\mathbf{R}$ la fonction f_n en posant $f_n(x) = x^n$.

1. Calculer les dérivées successives de f_n .
2. Calculer la dérivée d'ordre n de f_{2n} directement, puis en dérivant $f_{2n} = f_n \times f_n$ (et en utilisant la formule de Leibniz).
3. En déduire la relation :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 325. Soit $n \in \mathbf{N}$. Exprimer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x-3}$;
2. $f_2 : x \mapsto \sin(2x)$;
3. $f_3 : x \mapsto (x^2 - 5x + 1)e^{4x}$;
4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$;
5. $f_5 : x \mapsto e^x \cos(x)$;
6. $f_6 : x \mapsto \sin^3(x) + \cos^3(x)$.

Exercice 326. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?
3. Pouvez-vous généraliser les résultats obtenus ?

Exercice 327. Soit $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$. Introduisons la fonction $f_{n,\alpha}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_{n,\alpha} : x \longmapsto \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x} - \alpha) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{n,\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$ et exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions $f_{p,\beta}$, où $(p, \beta) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.
2. Pour quelles valeurs de n la fonction $f_{n,\alpha}$
 - (a) admet-elle une limite en 0 ?
 - (b) est-elle continue en 0 ?
 - (c) est-elle dérivable en 0 ?
 - (d) est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?
 - (e) est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 328. Considérons la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser. On note g sa fonction réciproque.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction g . On note I ce domaine.
3. Justifier que g est indéfiniment dérivable sur I .
4. Calculer $g(e)$, $g'(e)$ et $g''(e)$.

Exercice 329. Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbf{R}$, admettant $+\infty$ pour limite en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 330. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0; +\infty]$, dérivable sur $]0; +\infty[$. On suppose que f tend vers $f(0)$ en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0; +\infty[$ et qu'il existe $c \in]0; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 331. 1. Soit I un intervalle ouvert, et f une fonction numérique définie et dérivable sur I . Supposons que f' admette au plus k zéros distincts sur I , avec $k \geq 1$. Démontrer que f admet au plus $k+1$ zéros distincts sur I .

2. En déduire le nombre maximal de solutions réelles de l'équation :

$$x^n + ax + b = 0,$$

où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$.

Exercice 332. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$ telle qu'il existe deux réels a et b distincts, vérifiant

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe un nombre réel c compris entre a et b tel que $f^{(3)}(c) = 0$.

Exercice 333. On approche $(10\,001)^{\frac{1}{4}}$ par 10. Donner un majorant de l'erreur commise.

Exercice 334. A l'aide de l'égalité des accroissements finis, démontrer que l'expression $x^2 \left(\exp(\frac{1}{x}) - \exp(\frac{1}{x+1}) \right)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 335. On introduit la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2. En déduire un encadrement du terme général de la suite (S_n) , puis montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 336. Déterminer si les fonctions f suivantes définies sur $\mathbf{R}_+$ possèdent une dérivée en 0. Si c'est le cas, calculer $f'(0)$ et décider si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + \sqrt{x^5}}$;
2. $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$;
3. $f : x \mapsto \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 337. 1. Montrer que la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

est prolongeable par continuité en 0. On désigne encore par f ce prolongement par continuité.

2. Montrer que la fonction f ainsi définie sur $] -1 ; +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On admettra que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Exercice 338. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ telle que $g(x^2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$.

Exercice 339. On cherche à résoudre de manière approchée l'équation :

$$x = 1 + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (\text{E})$$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1 + \operatorname{Arctan}(\frac{x}{2})$ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution, que nous notons a , et déterminer la partie entière de a .
3. Prouver que si u est une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n , alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|.$$

En déduire qu'une telle suite converge vers a .

4. En considérant une telle suite pour une valeur appropriée de u_0 , déterminer un entier n pour lequel u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Exercice 340. Soit u la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbf{R}$ et vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}.$$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne.

2. En déduire que la suite u converge vers un nombre réel α , et prouver que $[\alpha] = 0$.
3. Si $u_0 = 0$, quel est le premier terme de u qui fournit une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

Exercice 341. Soit u la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbf{R}$ et vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} \sin(u_n).$$

Etudier la convergence de la suite u .

Exercice 342. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$xf'(x) - 2f(x) = x^4.$$

Exercice 343. Montrer que l'équation différentielle

$$|x|y' + (x-1)y = x^2$$

admet une unique solution définie sur $\mathbf{R}$, et la déterminer. On admettra que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.