Probabilités sur un univers fini

Exercice 344. Soit A, B, C trois événements. Donner une expression mathématique des événements suivants :

1. $D =$« aucun des événements A, B, C n'est réalisé » ;
2. $E =$« au moins un des événements A, B, C est réalisé » ;
3. $F =$« exactement un des événements A, B, C est réalisé » ;
4. $G =$« au plus un des événements A, B, C est réalisé ».

Exercice 345. On lance dix fois de suite une pièce. Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient pile au k-ième lancer ». Exprimer les événements suivants à l'aide des événements A_k :

1. $B =$« le premier pile est obtenu au deuxième lancer » ;
2. $C =$« le premier face est obtenu au quatrième lancer » ;
3. $D_n =$« le premier face est obtenu au n-ième lancer » (où $n \in [\![2, 10]\!]$) ;
4. $E =$« le second pile est obtenu au quatrième lancer » ;
5. $F =$« au plus un face est tiré » ;
6. $G =$« on n'observe jamais de séquence (Pile,Face) ».

Exercice 346. On considère un dé truqué à six faces. Les probabilités d'apparition des faces paires sont égales, de même pour les faces impaires. La probabilité d'obtenir une face paire est deux fois celle d'obtenir une face impaire. Quelle est la probabilité d'obtenir une face inférieure à 3 ?

Exercice 347. Cinquante pièces arrivent dans une usine, dont quatre sont défectueuses. Le contrôle qualité de l'usine teste au hasard dix pièces, et renvoie le lot s'il trouve une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité que la livraison passe le contrôle qualité ?

Exercice 348. On parie au hasard sur une course de dix chevaux. Quelles sont les probabilités de gagner :

1. au tiercé dans le désordre ? (on précisera l'univers utilisé) ;
2. au tiercé dans l'ordre ?

Exercice 349. Le code d'une carte bancaire est une suite ordonnée de quatre chiffres pris au hasard dans l'ensemble $[\![0, 9]\!]$. Calculer la probabilité qu'un code :

1. soit formé de chiffres distincts ;
2. soit formé d'une suite strictement croissante ;
3. comporte trois fois exactement le même chiffre ;
4. ne comporte que des chiffre impairs.

Exercice 350. Un sac de bonbons contient 10 bonbons rouges, 15 bonbons oranges et 20 bonbons jaunes. Un enfant plonge la main dans le sac et en ressort quatre bonbons. Avec quelle probabilité obtient-il

(a) quatre bonbons de la même couleur ?
(b) un bonbon au moins de chaque couleur ?
(c) le même nombre de bonbons rouges et de bonbons jaunes ?

Exercice 351. On range aléatoirement cinq boules numérotées de 1 à 5 dans quatre boîtes numérotées de 1 à 4.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boîte ?
3. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?
4. Même question avec une boîte vide.
5. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

Exercice 352. On lance trois dés cubiques non pipés. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. trois chiffres tous distincts ;
2. exactement deux chiffres distincts.

Exercice 353. On tire quatre cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. un carré ;
2. au moins un as ;
3. une suite de quatre cartes consécutives, non nécessairement de la même couleur ;
4. deux cartes rouges et deux cartes noires ;
5. exactement une dame et deux piques.

Exercice 354. Soient A et B deux événements de probabilités respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3}$. On suppose que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

1. Calculer la probabilité qu'au moins un des deux événements se réalise.
2. Calculer la probabilité qu'exactement un des deux se réalise.

Exercice 355. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge, toutes trois indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. la première et la dernière boule de la même couleur ;
2. un tirage bicolore ;
3. au moins une boule de chaque couleur.

Exercice 356. On jette trois dés non pipés. Calculer la probabilité que l'un d'entre eux soit tombé sur six sachant qu'ils sont tombés sur trois faces distinctes.

Exercice 357. On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculer la probabilité d'obtenir les 4 as.
2. Un joueur dévoile deux cartes de son jeu et ce sont des as. Calculer la probabilité qu'il détienne les 4 as.

Exercice 358. Une maladie rare touche un individu sur cent mille. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour $0,5\%$ des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 359. Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse est $p \in]0\,;\,1[$.
Sachant que l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

Exercice 360. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Calculer $\mathbb{P}(B)$ dans le cas où A et B sont disjoints, puis lorsque A et B sont indépendants, et enfin lorsque A est inclus dans B.

Exercice 361. Une urne contient cinq boules blanches et sept rouges. On effectue trois tirages d'une boule suivant la procédure suivante : à chaque tirage, on prend une boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de même couleur. Calculer les probabilités d'obtenir :

1. aucune boule blanche ;
2. exactement une boule blanche ;
3. trois boules blanches ;
4. exactement deux boules blanches.

Exercice 362. On tire deux pièces de monnaie équilibrées et on considère les événements $A =$« la première pièce tombe sur face », $B =$« la deuxième pièce tombe sur face » et $C =$« les deux pièces tombent du même côté ». Les événements A, B, C sont-ils indépendants deux à deux ? Et mutuellement indépendants ?

Exercice 363. On dispose de trois cartes : l'une a deux faces noires, une autre deux faces blanches, et la troisième une face noire et une face blanche. On tire une carte au hasard et sans la regarder, on la pose sur la table (les deux faces ont la même probabilité d'être visibles). La face observée est noire. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ?

Exercice 364 (*Problème de Monty Hall*). On dispose de trois verres opaques. Le meneur du jeu a caché dix euros sous l'un de ces verres. Le joueur désigne un des trois verres.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait désigné le verre cachant l'argent ?
2. Parmi les deux verres non désignés, le meneur du jeu écarte alors un verre qu'il sait non vide. Le joueur peut alors décider de modifier son choix. Que lui conseillez-vous ?

Exercice 365. Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n, il y a 4 chances sur 10 pour que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. En revanche, si elle est réservée au jour n, il y a 9 chances sur 10 pour qu'elle soit réservée au jour $n+1$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons p_n la probabilité que la place donnée soit réservée au jour n.

1. Donner la valeur de p_0.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. En déduire l'expression de p_n.
4. Quelle est la limite de $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

Exercice 366. Les poules pondent des œufs que l'on classe suivant trois calibres : A (petit), B (moyen) et C (gros). On suppose que si une poule pond un œuf d'un certain calibre, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera du même calibre, avec une probabilité $\frac{1}{2}$, et d'un des deux autres calibres avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par a_n, b_n et c_n les probabilités respectives pour que le n-ième œuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.
Pour tout entier naturel n non nul, posons

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. A l'aide de la question précédente, trouver une matrice U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.
3. Montrer que U est une combinaison linéaire des matrices J (matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1) et I_3. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbf{N}$ (on pourra distinguer le cas $k=0$) et en déduire l'expression de U^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. On suppose que le premier œuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des questions précédentes l'expression des termes généraux des suites a, b et c, ainsi que les limites de ces suites.

Exercice 367. On dispose de deux dés A et B dont les faces sont soit rouges, soit blanches. Le dé A a quatre faces rouges, le dé B quatre faces blanches. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le résultat est 1 ou 6, on ne joue ensuite qu'avec le dé A, sinon on ne joue qu'avec le dé B. On lance ensuite le dé sélectionné un certain nombre de fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « rouge » au premier jeu ? (le lancer de dé pour savoir avec quel dé jouer ne compte pas comme un jeu).
2. On a obtenu « rouge » aux deux premiers jeux. Quelle est la probabilité d'avoir rouge au troisième jeu ?
3. On a obtenu « rouge » aux n premiers jeux. Calculer la probabilité d'avoir utilisé le dé A.

Exercice 368. Soit $(n,r) \in (\mathbf{N}^\star)^2$, $k \in [\![1,n]\!]$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules au hasard, successivement, et avec remise. Le but de l'exercice est de calculer la probabilité que, sur r tirages, le plus grand des numéros obtenus soit k. Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on considère les événements :

- $A_{k,i} =$« le numéro obtenu au i-ième tirage est inférieur ou égal à k » ;
- $B_k =$« sur r tirages, le plus grand numéro obtenu est inférieur ou égal à k » ;
- $C_k =$« sur r tirages, le plus grand numéro est égal à k ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{k,1})$.
2. Calculer $\mathbb{P}(B_k)$.
3. En remarquant que $C_k = B_k \cap \overline{B_{k-1}}$, en déduire $\mathbb{P}(C_k)$.

Exercice 369. On lance deux dés équilibrés et on note les deux faces visibles. On note E l'événement « la somme des faces visibles est impaire », F l'événement « au moins l'une des faces est 1 » et G l'événement « la somme des faces est 5 ».

1. Déterminer $E \cap F$, $F \cap G$ et $\overline{E \cup F}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(E \cap F)$, $\mathbb{P}(F \cap G)$, $\mathbb{P}(E \cup F)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(F \cup G)$, $\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F})$, $\mathbb{P}(\overline{F} \cap \overline{G})$.

Exercice 370. Dans une tombola, 1000 billets dont 2 gagnants sont mis en vente. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 371 (*Paradoxe du prince de Toscane*). Le prince de Toscane demande un jour à Galilée : « Pourquoi, lorsqu'on jette trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que les deux sommes soient obtenues de six façons différentes ? ». Pouvez-vous répondre à cette question ?

Exercice 372. On lance plusieurs fois un dé non truqué. Quel est le nombre minimal de lancers nécessaires pour obtenir, avec au moins 9 chances sur 10,

(a) au moins un six ?

(b) au moins deux six ?

Exercice 373. Dans cet exercice, on dispose de cartes et chaque carte comporte une lettre.

1. On arrange au hasard les cartes M, E, L, A, N, G et E. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot MELANGE ?
2. On arrange au hasard les cartes C, C, C, I, O, O, O et R. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot COCORICO ?

Exercice 374. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On s'intéresse à une famille dans laquelle il y a exactement n enfants, filles ou garçons. On note

- A l'événement « la famille a des enfants des deux sexes » ;
- B l'événement « la famille a au plus une fille ».

Montrer que A et B sont des événements indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 375. Un exercice de mathématiques contient 4 coquilles, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite d'étudiants. A chaque relecture, chaque coquille est identifiée avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Les coquilles sont corrigées de manière indépendante les unes des autres et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que l'exercice soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ?
   Combien faut-il de relectures pour cette probabilité soit supérieure à $0,9$?

Exercice 376. Dans une région, pendant une saison donnée, les statistiques météorologiques disent qu'en moyenne, il y a 40% de jours de pluie et donc 60% de jours sans pluie. Une étude de fiabilité d'un baromètre de marque donnée a montré que, lorsqu'il pleuvait, le baromètre prédisait un jour sans pluie 10 fois sur 100 et lorsqu'il ne pleuvait pas, il prédisait de la pluie 20 fois sur 100 . Calculer la probabilité qu'il pleuve quand le baromètre prédisait qu'il pleut. Calculer la probabilité qu'il pleuve quand il indiquait qu'il ne pleut pas.

Exercice 377. Un buveur impénitent décide d'essayer de ne plus boire. S'il ne boit pas un jour donné, probabilité qu'il ne boive pas le lendemain est de 0,4 . S'il succombe à la tentation un jour, alors le remords fait que la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain monte à 0,8.

1. Quelle est la probabilité que ce buveur ne boive pas le n-ième jour ?
2. Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 378. On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2. On suppose qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne numérotée k ?

Exercice 379. On lance trois dés équilibrés. Quelle est la probabilités que l'un de ces deux dés montre 1 sachant que les trois autres ont montré des chiffres différents ?