# Polynômes

**Exercice 380.** Déterminer l'ensemble des polynômes $P$ de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$$4P = (X-1)P' + P''.$$

**Exercice 381.** Déterminer l'ensemble des polynômes $P$ de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$$P = 18P'P''.$$

**Exercice 382.** Effectuer la division euclidienne du polynôme

$$P = 6X^4 - 49X^3 + 123X^2 - 98X + 24$$

par le polynôme

$$T = X^2 - 7X + 12.$$

En déduire les racines du polynôme $P$.

**Exercice 383.** Déterminer les racines du polynôme

$$P = 2X^3 - 17X^2 + 40X - 16,$$

sachant que celui-ci admet une racine double.

**Exercice 384.** Démontrer que le polynôme $X^3 - 3X + 1$ admet trois racines réelles distinctes.

**Exercice 385.** Déterminer les racines du polynôme

$$P = 2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i,$$

sachant que celui-ci admet une racine réelle.

**Exercice 386.**
1. Déterminer un polynôme de degré au plus 1 vérifiant $P(2) = 2$ et $P(3) = -1$.
2. Déterminer un polynôme de degré au plus 2 vérifiant $P(-1) = 3$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 0$.

**Exercice 387.** Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $E$ des polynômes $P$ à coefficients réels vérifiant

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(X^2+1) = P(X)^2 + 1.$$

1. Soit $P \in E$. On introduit la suite $u$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P(u_n) = u_n^2 + 1$ pour tout entier naturel $n$. En déduire que $P = X^2 + 1$.
2. Conclure.

**Exercice 388.**
1. Pour tout entier naturel $n$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n$ par $X^2 - 5X + 6$, puis le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n$ par le polynôme $X^2 - 4X + 4$.
2. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que $(A-I)(A-2I) = 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n$ par le polynôme $(X-1)(X-2)$, et en déduire l'expression de $A^n$ pour tout entier naturel $n$.
3. On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer l'unique réel $\lambda$ tel que $B - \lambda I$ soit non inversible, puis montrer que $(B-\lambda I)^2 = 0$. En déduire l'expression de $B^n$ pour tout entier naturel $n$.

**Exercice 389.** Pour quelles valeurs de l'entier $n$ le polynôme $X^{2n}+X^n+1$ est-il divisible par le polynôme $X^2+X+1$ ?

**Exercice 390.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que 1 est racine du polynôme $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et déterminer son ordre de multiplicité.

**Exercice 391.** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple.

**Exercice 392.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

(a) $P_1 = X^5-1$

(b) $P_2 = X^4+4X^2+3$

(c) $P_3 = 2X^4-6X^2+5$

(d) $P_4 = (X^2-X+1)^2+1$

(e) $P_5 = (X^2-3X-1)^2+(4X-5)^2$

(f) $P_6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{3}(X^{2k+1}-X^{2k})$

(g) $P_7 = (2X^2+1)^3+(X^2+2)^3$

(h) $P_8 = X^6+1$

(i) $P_9 = (X+1)^n-(X-1)^n$.

**Exercice 393.** Posons

$$P = 2X^4+X^3-X^2+2X-1 \qquad \text{et} \qquad Q = 4X^3+4X^2-X-1.$$

Montrer que ces polynômes ont une racine commune, et la déterminer.

**Exercice 394.** Soit $n$ un entier naturel non nul. Posons

$$P_n = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{n}\right)^n - \left(1-\frac{iX}{n}\right)^n\right).$$

1. Démontrer que $P_n \in \mathbf{R}[X]$.
2. Factoriser $P_n$ dans $\mathbf{R}[X]$ pour $n=5$ et $n=6$.

**Exercice 395.** Déterminer le plus grand entier entier naturel $n$ tel que $n-3$ divise $n^3-3$.

**Exercice 396.**

1. Soit $P$ un polynôme non nul à coefficients réels tel que
$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$
   (a) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de $P$. Montrer que $\alpha^2$ est une racine de $P$ et en déduire que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
   (b) Montrer que 0 n'est pas racine de $P$.
   (c) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de $P$. Montrer que $|\alpha+1| = 1$.
   (d) En déduire les racines de $P$ ainsi que la forme du polynôme $P$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes $P$ à coefficients réels vérifiant
$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

**Exercice 397.** Déterminer les racines du polynôme $X^3-8X^2+23X-28$ sachant que deux de ses racines sont de somme égale à la troisième.

**Exercice 398.** Introduisons la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée des polynômes

$$P_0 = X \quad \text{et} \quad P_1 = 3X-4X^3,$$

et par la relation de récurrence

$$P_{n+2} = 2(1-2X^2)P_{n+1} - P_n.$$

1. Déterminer, pour tout entier naturel $n$, le degré et le coefficient dominant du polynôme $P_n$.
2. Montrer que le polynôme $X$ divise $P_n$ pour tout entier naturel $n$.
3. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.
4. Prouver que pour tout entier naturel $n$ et pour tout nombre réel $\theta$,
$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n+1)\theta).$$
5. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer que le polynôme $P_n$ est le seul polynôme vérifiant pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,
$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n+1)\theta)\,?$$
   (b) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $P_n(\sin(\theta)) = 0$ d'inconnue $\theta$ réelle.
   (c) En déduire les racines de $P_n$ dans $[-1\,;\,1]$ et factoriser $P_n$ sur $\mathbf{R}$.