
Variables aléatoires

Exercice 399. 1. Sur l'univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on définit deux variables aléatoires X et Y par :

a	1	2	3	4	5	6
$X(a)$	1	0	1	-1	0	1
$Y(a)$	2	2	0	1	1	0

Expliciter les événements suivants : $\{X = 0\}$, $\{X = 2\}$, $\{X \leq 0\}$, $\{X = Y\}$, $\{X \leq Y\}$, $\{0 < Y < 1\}$, $\{X + Y = 3\}$.

2. On suppose que Ω est muni de la probabilité uniforme (équiprobabilité). Calculer la probabilité de l'événement $XY = 0$ et celle de l'événement $|X - Y| \leq 1$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

Exercice 400. On lance trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de "faces" obtenues.

Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X , puis calculer son espérance. Pouvait-on obtenir $\mathbb{E}(X)$ sans chercher la loi de X ?

Exercice 401. On joue au jeu suivant : après avoir parié sur un nombre compris entre 1 et 6, on lance trois dés non pipés : si le nombre choisi n'est pas sorti, on perd un euro, s'il sort une, deux ou trois fois, on gagne respectivement un, deux, ou trois euros. Notons X la variable aléatoire représentant le gain après une partie.

Déterminer la loi de X , puis son espérance.

Exercice 402. Une variable aléatoire S obéit à une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Elle a pour espérance 6, et pour variance 3,6. Quelles sont les valeurs de n et p ?

Exercice 403. On tire 5 fois de suite 1 carte d'un jeu de 32 cartes, avec remise. Quelle est la probabilité de tirer au moins 2 as ?

Exercice 404. Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires, indiscernables au toucher. Un joueur tire au hasard successivement cinq boules de l'urne. On note B le nombre de boules blanches tirées et N le nombre de boules noires tirées.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires B et N , dans le cas où les tirages s'effectuent sans remise, puis dans le cas où les tirages s'effectuent avec remise.

Exercice 405. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, telle qu'il existe un nombre réel strictement positif a pour lequel :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a \binom{n}{k}}{k + 1}.$$

1. Calculer a .
2. Calculer l'espérance et la variance de X . On pourra commencer par calculer $\mathbb{E}(X + 1)$ et $\mathbb{E}(X(X + 1))$.

Exercice 406. Un joueur prélève n boules successivement et avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On considère la variable aléatoire X égale au plus grand des numéros des boules tirées. Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}(X \leq k)$. En déduire la loi de X .

Exercice 407. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k).$$

2. Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs. Lorsque le joueur commence un niveau (ce qui suppose qu'il ait réussi les niveaux précédents), la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.

- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X , et calculer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X \geq k)$.
 (b) En déduire que $\mathbb{E}(X) = 2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Exercice 408. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire

$$Y = \frac{1}{X+1}.$$

Exercice 409. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pourra utiliser les formules suivantes :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Une urne contient $n-2$ boules rouges numérotées de 1 à $n-2$ et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une et sans remise de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche, et Y celle correspondant au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_i l'événement "la i -ème boule tirée est blanche".

1. Déterminer $\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{P}(X=2)$, $\mathbb{P}(X=3)$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Exprimer l'événement $(X=k)$ à l'aide des événements $B_1, \dots, B_n$, puis montrer que

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

3. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{3}$. Calculer $\mathbb{V}(X)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ où Z est le nombre de boules rouges restant dans l'urne lorsque la première boule blanche vient d'être tirée.
5. Déterminer la loi de Y .

Exercice 410. Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard une poignée de jetons de cette urne. Notons X la somme des points obtenus, et Y le nombre de jetons de la poignée tirée. On suppose que Y est une variable aléatoire uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$, et on convient que si Y prend la valeur 0, alors X prend la valeur 0.

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la variable aléatoire X_k en posant : $X_k = k$ si le jeton k est dans la poignée tirée, $X_k = 0$ sinon. Montrer que $X = \sum_{k=1}^n X_k$.
2. En utilisant le système complet $(\{Y=p\})_{p \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire $\frac{X_k}{k}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
3. En déduire l'espérance de X .

Exercice 411. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X=Y\}$.

Exercice 412. Soient X et Y deux variables indépendantes définies par :

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}.$$

Notons $Z = XY$.

Montrer que les variables aléatoires X , Y , Z sont indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

Exercice 413. Montrer que deux variables de Bernoulli X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}(X=1 \cap Y=1) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1).$$

Exercice 414. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur un univers Ω fini, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Exercice 415. Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p ($0 < p < 1$).

1. Déterminer la loi conjointe du couple (S, D) , où $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
2. Déterminer les lois marginales du couple (S, D) . Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$.
3. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 416. On considère deux variables aléatoires finies X_1 et X_2 de même loi. Soit Y une variable aléatoire de Bernoulli indépendante de X_1 et de X_2 .

Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z définie par $Z = X_1Y + X_2(1 - Y)$.

Exercice 417. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau :

$Y \backslash X$	0	1	2
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
-1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

1. Préciser les lois marginales de X et Y .
2. Donner la loi de la variable XY .
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.
4. Comparer $\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1))$ et $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(Y = 1)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 418. On lance un dé bleu et un dé rouge. On note X les points indiqués par le dé bleu, Y ceux du dé rouge, et on définit la variable aléatoire Z de la manière suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \leq 3, \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) > 3 \text{ et } Y(\omega) > 3, \\ Y(\omega) + 3 & \text{si } X(\omega) > 3 \text{ et } Y(\omega) \leq 3 \end{cases}$$

Déterminer les lois des couples (X, Y) et (X, Z) . Vérifier que ces couples ont mêmes lois marginales, mais pas même loi conjointe.

Exercice 419. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la loi conjointe est donnée par : pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{(n+1) \times 2^n} \binom{n}{j}$$

1. Montrer que X suit une loi uniforme et que Y suit une loi binomiale.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 420. On lance un dé non pipé. La variable aléatoire X est définie en donnant la valeur 2 lorsque le point marqué est pair et la valeur 1 lorsque le point marqué est impair. La variable aléatoire Y est définie en donnant la valeur 3 lorsque le point marqué est 1 ou 6 et la valeur 0 dans les autres cas.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Reprendre ces questions en définissant Y de la façon suivante : Y prend la valeur 3 lorsque le point marqué est 2 ou 6, et la valeur 0 dans les autres cas.

Exercice 421. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère n boules numérotées de 1 à n et n cases numérotées de 1 à n . On range au hasard les n boules dans les n cases en ne mettant qu'une seule boule par case. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note S_i la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si la i -ième boule se trouve dans la i -ième case. On note S la variable aléatoire correspondant au nombre de boules se trouvant dans la case de même numéro.

1. Exprimer la variable aléatoire S à l'aide des variables aléatoires S_i .
2. Expliciter la loi et donner l'espérance des variables aléatoires S_i .

3. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, expliciter la loi et donner l'espérance de la variable aléatoire $S_i S_j$.
4. En déduire l'espérance et la variance de S .

Exercice 422. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois un dé non pipé. Soit X la somme des points obtenus et Y le plus grand nombre obtenu.

1. Calculer l'espérance et la variance de X (on pourra écrire X comme une somme de variables aléatoires plus simples).
2. Donner la loi de Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 423. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , on tire deux boules une à une, sans remise. On note X_1 le premier numéro tiré, X_2 le deuxième numéro tiré. Soit $X = \min(X_1; X_2)$ et $Y = \max(X_1; X_2)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer la loi de X et celle de Y .
3. Étudier l'indépendance des variables X et Y .

Exercice 424. On considère deux urnes : une urne bleue contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1, et une urne rouge contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.

On appelle "échange" l'action consistant à extraire simultanément un jeton de chaque urne puis à le remettre dans l'autre urne. On effectue des échanges successifs indéfiniment. Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par Z_n la variable aléatoire réelle discrète égale à la somme des points marqués sur les jetons de l'urne bleue après le n -ième échange. On note Z_0 la variable certaine égale à 1, somme initiale des points dans l'urne bleue.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de Z_1 et déterminer la loi de Z_1 .
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer les probabilités conditionnelles

$$P_{Z_n=0}(Z_{n+1}=0)$$

$$P_{Z_n=1}(Z_{n+1}=0)$$

$$P_{Z_n=2}(Z_{n+1}=0)$$

On note dans la suite pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $p_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(Z_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(Z_n = 2)$.

3. Exprimer p_{n+1} en fonction de q_n , puis q_{n+1} en fonction de p_n , q_n et r_n , et enfin, r_{n+1} en fonction de q_n .

On note pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$U_{n+1} = AU_n$. Cette relation est-elle encore valable pour $n = 0$?

4. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$, $U_n = A^n U_0$.

On donne pour $n \geq 1$, $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$.

5. En déduire pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, p_n , q_n , r_n en fonction de n , ainsi que leur limite.
6. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Z_n ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 425. Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$). Ces appels sont indépendants les uns des autres, et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0; 1[$. On note $q = 1 - p$, et X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Après ses n appels, le secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacune des personnes qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus au total.
 - (a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = \ell | X = k)$.
 - (b) Déterminer la loi de Z .