
Intégration

Exercice 426. Sans les calculer, comparer les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2 dx \text{ et } J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx.$$

Exercice 427. Donner un exemple de fonction en escalier positive sur $[0; 1]$, non nulle, et dont l'intégrale sur $[0; 1]$ est nulle.

Exercice 428. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$. Montrer que $P = 0$.

Exercice 429. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos(x)} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 430. On cherche à déterminer l'ensemble E des fonctions f numériques continues sur $[0; 1]$ telles que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

1. Soit $f \in E$. Calculer

$$\int_0^1 (f - f^2)^2.$$

2. Conclure.

Exercice 431. 1. Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est définie sur $\mathbf{R}^*$.

3. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{4}]$. Encadrer l'expression $\frac{\cos(t)}{t}$ pour tout $t \in [x, 2x]$ et en déduire un encadrement de $f(x)$.

4. Prouver que f admet une limite finie à droite en 0 que l'on déterminera.

5. Que peut-on dire concernant la limite à gauche en 0 de f ?

Exercice 432. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Prouver que la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_a^b g(t) \cos(nt) dt$ est une suite bornée.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. Prouver que la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ converge vers 0. On pourra utiliser la question précédente après avoir fait une intégration par parties.

Exercice 433. Déterminer le domaine de définition et la limite en 0^+ de la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 434. Déterminer le domaine de définition et donner un équivalent simple en $+\infty$ de

$$F : x \mapsto \int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt.$$

Exercice 435. Déterminer le domaine de définition et donner un équivalent simple en $+\infty$ de

$$F : x \mapsto \int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt.$$

Exercice 436. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

1. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathbf{R}_+$
2. Montrer que f est dérivable et exprimer f' .
3. En étudiant les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction

$$\varphi : x \longmapsto 2xe^{x^2-x^4} - 1,$$

dresser le tableau des variations de f . On placera en particulier le point d'abscisse 1 dans ce tableau.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 437. Soit F l'application définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
2. Déterminer le développement limité de F en 1 à l'ordre 4.

Exercice 438. Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la fonction F ainsi définie sur $\mathbf{R}_+^*$ est dérivable et déterminer F' . En déduire une expression plus simple de F .
2. Retrouver ce résultat à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 439. Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

1. Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer g' . On pourra utiliser la formule d'addition du sinus.
2. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, puis vérifier que

$$g'' + g = f.$$

3. En déduire l'ensemble des fonctions numériques solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = f.$$

Exercice 440. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

1. Calculer J_1 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1},$$

et en déduire la limite de la suite (J_n) .

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

4. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
5. Donner un équivalent de (I_n) .

Exercice 441. Pour tout entier naturel n , on pose

$$I_n = \int_1^e t^2 (\ln t)^n dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
3. Prouver que pour tout $x \in [1; e]$, $0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$. En déduire la limite de la suite (I_n) .
4. Etablir, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'égalité

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

En déduire un équivalent de la suite (I_n) .

Exercice 442. Soit H la fonction définie par

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Prouver que la fonction H est définie sur $I =]0, 1[\cup]1; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in I$, déterminer le signe de $H(x)$.
3. Etudier les limites de H en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 1$,

$$\frac{H(x)}{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq \frac{H(x)}{x}.$$

5. Calculer pour tout $x > 1$,

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}.$$

6. En déduire que H admet une limite en 1^+ et la déterminer.
7. Adapter le raisonnement précédent pour prouver que H admet une limite en 1^- et la déterminer.
8. En déduire que H est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}_+$. On note encore H ce prolongement.
9. En utilisant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.
10. Dresser le tableau des variations de la fonction H .

Exercice 443. Étudier la limite éventuelle des suites de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2 + k^2}$$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3}$$

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-\frac{k}{n}}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

$$z_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Exercice 444. Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général

$$w_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 445. Déterminer des équivalents des suites :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Exercice 446. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 447. Montrer que pour tout nombre réel x ,

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$