
Développements limités

Exercice 448. Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Montrer que si f est une fonction paire (resp. impaire), son développement limite ne contient que des termes de degré pair (resp. impair).

Exercice 449. Déterminer, s'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions définies au voisinage de 0 par les expressions suivantes :

(a)	$\cos(2x)$	(ordre 3)	(b)	$\sin(x) - x + x^7$	(ordre 3)
(c)	$x - \ln(1+x)$	(ordre 3)	(d)	$(e^x)^2$	(ordre 4)
(e)	$\sin(x+x^2)$	(ordre 3)	(f)	$\sqrt{1+x+x^2}$	(ordre 3)
(g)	$\sin^2(x)$	(ordre 5)	(h)	$e^x(1+x+x^2)$	(ordre 2)
(i)	$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$	(ordre 3)	(j)	$\ln(\cos x + \sin x)$	(ordre 3)
(k)	$\exp(1+2x)$	(ordre 4)	(l)	$\frac{\cos x}{1+x}$	(ordre 4)
(m)	$\frac{e^x}{1-2x}$	(ordre 3)	(n)	$\frac{\sin(2x)}{x+x^2}$	(ordre 3)
(o)	$\sqrt{1+x^2}e^x$	(ordre 2)	(p)	$\exp\left(\frac{\sin x}{x}\right)$	(ordre 4)
(q)	$\tan(x)$	(ordre 6)	(r)	$\tan\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$	(ordre 4)
(s)	$\frac{1}{1+\cos(x)}$	(ordre 2)	(t)	$\sqrt{\frac{x-4}{x-1}}$	(ordre 2)
(u)	$\operatorname{Arctan}(x)$	(ordre 4)	(v)	$\operatorname{Arcsin}(x)$	(ordre 4)
(w)	$\frac{x}{e^x-1}$	(ordre 3)	(x)	$\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$	(ordre 4)
(y)	$\operatorname{Arccos}(\sqrt{1-x^2})$	(ordre 5)	(z)	$\int_0^x \frac{\sin(t)}{1+t} dt$	(ordre 5)

Exercice 450. Déterminer le développement limité au point a l'ordre indiqué des fonctions définies au voisinage de a par les expressions suivantes :

(a)	$\sin(2x)$	$a = \frac{\pi}{2}$	(ordre 5)	(b)	$(\ln x)^2$	$a = 3$	(ordre 2)
(c)	$\sqrt{3x} - \sqrt{3+x}$	$a = 1$	(ordre 3)	(d)	$\exp(x^2)$	$a = 2$	(ordre 3)

Exercice 451. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto \sin(x) + \tan(x)$ en 0.

Exercice 452. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ vérifiant pour tout réel x

$$x(f(x) - 2) + e^{f(x)-1} - 1 = 0$$

1. Justifier que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et le déterminer.
2. En déduire l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0.

Exercice 453. Écrire les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions $\sin$, Arcsin , sh , $\tan$, Arctan . En déduire qu'au voisinage de 0, on a :

$$\operatorname{Arctan}(x) \leq \sin(x) \leq x \leq \operatorname{sh}(x) \leq \operatorname{Arcsin}(x) \leq \tan(x)$$

Exercice 454. 1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer le $\operatorname{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^n x^k\right)$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer le $\operatorname{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 455. Calculer le $DL_6(0)$ de

$$x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Exercice 456. Déterminer les limites suivantes, si elles existent :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2} - e^{-x} \right); & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right); \\ \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x}; & \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}; \\ \text{(e)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x < \frac{\pi}{6}}} (1 - 2 \sin(x)) \tan(3x); & \text{(f)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\ln(\sin(x))} \right). \end{array}$$

Exercice 457. Montrer que les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité en 0, et étudier la dérivabilité en 0 des fonctions ainsi définies.

$$\begin{array}{ll} (1) \quad x \mapsto \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) & (2) \quad x \mapsto \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) \\ (3) \quad x \mapsto \frac{\cos(2x^2) - 1}{x^2} & (4) \quad x \mapsto \ln \left(\frac{1 - \cos(3x)}{x^2} \right) \\ (5) \quad x \mapsto \exp \left(\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} \right) & (6) \quad x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Exercice 458. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'équation de la tangente au point d'abscisse a indiqué, et trouver la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage du point a .

1. $f : x \mapsto \sin^2(x) - \frac{x^2}{1+x^2}$, $a = 0$.
2. $f : x \mapsto \sin(x) + \operatorname{Arcsin}(x)$, $a = 0$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{3x} - \sqrt{3+x}$, $a = 1$.

Exercice 459. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'asymptote et trouver la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote, au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{array}{ll} (1) \quad f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + x + 1} & (2) \quad f : x \mapsto (2x+1)e^{\frac{1}{x-1}} \\ (3) \quad f : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} & (4) \quad f : x \mapsto x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) - \frac{3x^2}{1+3x^2} \right). \end{array}$$

Exercice 460. 1. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto \sin(x) + \tan(x)$ en 0.

2. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto x^3 + e^x - 1$ en 0.
3. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \cos(x) - 1$ en 0.
4. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}$ en $+\infty$.

Exercice 461. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1; 1[$ par

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
2. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on explicitera.
3. Justifier que f^{-1} admet un $DL_3(0)$, puis déterminer celui-ci.

Exercice 462. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un développement asymptotique à deux termes de u .
Rappel : pour tout $u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$.