
Espaces vectoriels

- Exercice 463.**
1. Dans $\mathbf{R}^2$, le vecteur $(7, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 4)$ et $(-1, 2)$?
 2. Dans $\mathbf{R}^3$, le vecteur $(5, 5, 1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 3, 0)$ et $(3, 2, 0)$?
 3. Dans $\mathbf{R}^3$, le vecteur $(0, -2, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 2, 3)$ et $(3, -1, 2)$?
 4. Dans $\mathbf{R}^2$, le vecteur $(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{3}, 1)$?
 5. Dans $\mathbf{R}[X]$, le polynôme $P = 16X^3 - 7X^2 - 4 + 21X$ est-il combinaison linéaire des polynômes

$$A = 8X^3 - 5X^2 + 1 \quad \text{et} \quad B = X^2 + 7X - 2 ?$$

6. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'application $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des applications $\sin$ et $\cos$?
7. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'application $x \mapsto \cos(2x)$ est-elle combinaison linéaire des applications $\sin^2$ et $\cos^2$?
8. Dans l'espace vectoriel des suites réelles, la suite $(1)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle combinaison linéaire des suites

$$(n^2)_{n \in \mathbf{N}}, \quad (2^n)_{n \in \mathbf{N}}, \quad (2n - 1)_{n \in \mathbf{N}} ?$$

Exercice 464. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel dans lequel ils sont inclus ?

$A = \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid x = y\}$	$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq y\}$
$C = \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid x = y \}$	$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid x = 0\}$
$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid x = 2y = 3z\}$	$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid xyz = 0\}$
$G = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(1) = 0\}$	$H = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(3) \leq 0\}$
$I = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(3) = 2f(2)\}$	$J = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) \leq 5\}$
$K = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\}$	$L = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) = 5\}$
$M = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f \text{ est croissante}\}$	$N = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f \text{ est paire}\}$
$O = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid u \text{ converge}\}$	$P = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid u \text{ est bornée}\}$
$Q = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M^{\top} + 2M = I_n\}$	$R = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M^{\top} + M = 0\}$
$S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid M^2 = M\}$	$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$

Exercice 465.

1. Démontrer que les ensembles

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, 2x, -3x) : x \in \mathbf{R}\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

2. Déterminer deux vecteurs u et v de $\mathbf{R}^3$ tels que $E = \text{Vect}(u, v)$.
3. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'ensemble F , c'est-à-dire déterminer à quelles conditions sur les réelles a, b et c le vecteur (a, b, c) est un élément de F .
4. Les ensembles $E \cap F$ et $E \cup F$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 466. Soit $F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 : x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0 \text{ et } x + y = z + t = u\}$. Déterminer des vecteurs a et b de $\mathbf{R}^5$ de sorte que $F = \text{Vect}(a, b)$.

Exercice 467. Considérons

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}, \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x - 2y - t = 0 \text{ et } x - t = 0\}.$$

Déterminer les vecteurs f_1, f_2, g_1, g_2, e de $\mathbf{R}^4$ tels que $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$, $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$ et $F \cap G = \text{Vect}(e)$.

Exercice 468. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Est-il vrai que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Est-il vrai que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E ?
3. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 469. Soit $e = (1, -1, 2, -2)$, $f = (4, 3, 2, 1)$ et $F = \text{Vect}(e, f)$. Déterminer à quelles conditions sur les réels a, b, c, d le vecteur (a, b, c, d) appartient à F (les conditions trouvées forment un système d'équations cartésiennes de F).

Exercice 470. Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(2, 4, 1)$ et $(0, -1, 3)$.

Exercice 471. Dans $\mathbf{R}^3$, démontrer que $\text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1)) = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, -1, 1))$.

Exercice 472. Soit E un espace vectoriel et X_1, X_2, X_3 trois vecteurs de E . Posons

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = X_1 + X_2, \quad Y_3 = 2X_1 + X_2 - X_3.$$

Montrer que :

$$\text{Vect}(X_1, X_2, X_3) = \text{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3)$$

Exercice 473. Soit $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 2, 3), (1, 4, 5))$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 0), (1, 1, 1))$.

1. A quelle condition le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient-il à F ? à G ?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbf{R}^3$ tel que $F \cap G = \text{Vect}(a)$.
3. Montrer que $F + G = \mathbf{R}^3$. Cette somme est-elle directe ?

Exercice 474. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

1. Donner une description de F et G comme sous-espaces vectoriels engendrés.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Montrer qu'il est possible de trouver a de sorte que $(a, -a, 0) \in F$ et $(x - a, y + a, z) \in G$. Que vaut $F + G$ (on pourra remarquer que $u = (a, -a, 0) + (x - a, y + a, z)$).
3. F et G sont-ils en somme directe ?

Exercice 475. On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid AM = 0\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid BM = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $A + B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

Exercice 476. Dans chacun des cas suivants, montrer que les espaces vectoriels F et G sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires (respectivement dans $\mathbf{R}^3$ pour (a) et dans $\mathbf{R}^4$ pour (b)) ?

- (a) $F = \text{Vect}((1, 1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 3), (2, 1, -1))$.
- (b) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z = 0 \text{ et } t = 0\}$.

Exercice 477. On considère les ensembles

$$F = \left\{ P \in \mathbf{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \}.$$

1. Déterminer des polynômes $P_1, P_2, P_3 \in \mathbf{R}_2[X]$ tels que $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$ et $G = \text{Vect}(P_3)$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}_2[X]$?

Exercice 478. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ $F = \text{Vect}(\cos)$ et $G = \text{Vect}(\sin)$ sont-ils en somme directe ?

Exercice 479. Soit $F = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$, $G = \mathbf{C}_1[X]$ et $H = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{C}[X]$. Montrer que c'est aussi le cas de G et H .

Exercice 480. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles convergentes, $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des suites réelles convergentes vers 0 et $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$ supplémentaires.

Exercice 481. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$\begin{array}{ll}
 a : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2 & b : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2 \\
 (x, y, z) \longmapsto (2x + y, 3x - z - 1) & (x, y) \longmapsto (2x - 3y, x + 5y) \\
 c : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} & d : \mathbf{C}[X] \longrightarrow \mathbf{C} \\
 (x, y) \longmapsto xy & P \longmapsto P(0) + P'(1) \\
 e : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X] & f : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}[X] \\
 P \longmapsto P^2 & (a_0, a_1, a_2) \longmapsto a_0 + a_1X + a_2X^2 \\
 g : \mathbf{C}^{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}^2 & h : D^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \\
 u \longmapsto (\Re(u(0)), |u(1)|) & u \longmapsto u + u' \\
 i : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & j : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \\
 u \longmapsto (nu_n)_{n \in \mathbf{N}} & u \longmapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}
 \end{array}$$

Exercice 482. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc}
 u : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\
 M & \longmapsto & M^{\top}
 \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Exercice 483. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer leur noyau et leur image.

$$\begin{array}{lll}
 u : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3 & v : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} & w : \mathbf{C}_3[X] \longrightarrow \mathbf{C}_3[X] \\
 (x, y) \longmapsto (x - y, y - x, 0) & z \longmapsto z + i\bar{z} & P \longmapsto P - (X + 1)P'
 \end{array}$$

Exercice 484. Montrer que les ensembles $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (1, -3, 3, 1))$ sont supplémentaires. Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G . Donner également l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 485. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f + f - 6\text{Id} = 0$.

1. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .
2. Montrer que $\text{Ker}(f + 3\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = E$.

Exercice 486. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel non réduit au vecteur nul et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^3 = f^2$.

1. Montrer que $f^p = f^2$ pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2.
2. Prouver que si l'application f est bijective, alors $f = \text{Id}$.
3. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f^2) = E$.

Exercice 487. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

1. Développer $(u + v)^2$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(u + v)^2 = u^2 + 2u \circ v + v^2$.
3. Donner une condition suffisante pour que $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2 \circ v + 3u \circ v^2 + v^3$.
4. Donner une condition suffisante pour que l'on puisse développer $(u + v)^n$ à l'aide du binôme de Newton.

Exercice 488. On dit qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est nilpotent si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $u^p = 0$.

1. Si $E \neq \{0\}$, un endomorphisme nilpotent peut-il être bijectif ?
2. Soit u et v deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel E . On suppose que u et v commutent. Montrer que $u + v$ est nilpotent.

Exercice 489. Soit E et F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels, $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\alpha \in \mathbf{K}^*$. Montrer que :

$$\operatorname{Im}(\alpha u) = \operatorname{Im}(u), \quad \operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v), \quad \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(u + v).$$

Proposer des exemples montrant que ces inclusions sont strictes en général.

Exercice 490 (Suites des noyaux et des images itérés). Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(u^2)$ et que plus généralement, pour tout entier naturel p , $\operatorname{Ker}(u^p) \subset \operatorname{Ker}(u^{p+1})$. Que dire des inclusions réciproques ?
2. Trouver de même une relation d'inclusion entre $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Im}(u^2)$ puis plus généralement entre $\operatorname{Im}(u^p)$ et $\operatorname{Im}(u^{p+1})$, pour tout entier naturel p .

Exercice 491. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(v)$.

Exercice 492. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E .

Montrer que si u et v commutent, alors $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont stables par v .

Exercice 493. On introduit

$$F = \operatorname{Vect}((1, 1, 0)) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
2. Expliciter la projection p sur G de direction F et la symétrie s par rapport à F de direction G .

Exercice 494. On considère l'application

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{1}{3}(x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z) \end{aligned}$$

1. Montrer que u est une symétrie de $\mathbf{R}^3$.
2. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et déterminer son application réciproque.

Exercice 495. On considère $\mathbf{C}$ comme un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et l'application

$$\begin{aligned} p : \quad \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} \end{aligned}$$

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbf{C}$.
2. Montrer que p est un projecteur. Déterminer $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$.

Exercice 496. Pour chacune des applications φ suivantes, vérifier qu'il s'agit d'un projecteur et déterminer sa direction $\operatorname{Ker}(\varphi)$, ainsi que ses invariants $\operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id})$.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{R}[X] &\longrightarrow \mathbf{R}[X] & \text{puis} & \quad \varphi : \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \\ P &\longmapsto P(1)X^2 & f &\longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto (f(1) - f(0))x + f(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 497 (Lemme de Schur). Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $h \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbf{K}$ tel que $h(x) = \lambda_x x$. Le but de l'exercice est de montrer que h est une homothétie de E . Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

1. Soit $y \in \operatorname{Vect}(x)$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
2. Soit $y \in E \setminus \operatorname{Vect}(x)$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
3. Conclure.

Exercice 498. Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est un endomorphisme.

$$u \longmapsto (u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

Déterminer les ensembles

$$E = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 4\}, \quad F = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 12(-1)^n\}.$$