
Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 499. La famille de vecteurs $((1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 1))$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^3$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 500. La famille de vecteurs $((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 0))$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^4$? est-ce une famille génératrice de $\mathbf{R}^4$?

Exercice 501. Démontrer que la famille de polynômes $(X - 2, 2X + 3)$ est une base de $\mathbf{R}_1[X]$.

Exercice 502. On considère $a = (1, i, -1, -i)$, $b = (0, 1 + i, 2i, i - 1)$ et $c = (1, 1, 1, 1)$. Prouver que (a, b, c) est une famille liée dans le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ et une famille libre dans le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^4$.

Exercice 503. Introduisons les fonctions f , g et h définies sur $\mathbf{R}$:

$$f : x \mapsto e^x, \quad g : x \mapsto e^{2x}, \quad h : x \mapsto e^{3x}.$$

Démontrer que la famille (f, g, h) est une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions numériques.

Exercice 504. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, dire si les familles suivantes sont libres :

$$(f_k : x \mapsto e^{x+k})_{1 \leq k \leq 100}, \quad (g_k : x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq 100}.$$

Exercice 505. Déterminer une famille génératrice, puis une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 3x + y = 0 \text{ et } x + t = 0\} \quad F = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}.$$

Exercice 506. Considérons les ensembles

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - 4z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}.$$

Montrer que E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie et en déterminer une base.

Exercice 507. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$x = (1, 0, 0, 1), \quad y = (1, -1, 0, 1), \quad z = (1, 0, 1, 1), \quad t = (1, 1, 1, 1).$$

1. Montrer que la famille (x, y, z, t) est une famille liée.
2. La famille (x, y, z) peut-elle être complétée en une base de $\mathbf{R}^4$?
3. Compléter la famille (x, y, z) en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 508. 1. Démontrer que, dans $\mathbf{R}[X]$, la famille de polynômes $(X^3 + 2X - 1, X + 1, X^3 - X^2)$ est une famille libre.

2. Cette famille est-elle une base de $\mathbf{R}_3[X]$?
3. La compléter en une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Exercice 509. 1. Montrer que le triplet $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (2, 0, -1), (2, 1, 1))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

2. Donner les coordonnées des vecteurs $(4, -1, 1)$ et $(1, 0, 0)$ dans cette base.

Exercice 510. Déterminer une base et la dimension de

$$E = \text{Vect}((2, -1, -3), (-4, 1, 3), (-6, 3, 9), (7, 2, 1))$$

Exercice 511. Dans $\mathbf{R}_4[X]$, montrer que la famille $(1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une base et déterminer les coordonnées de $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ dans cette base.

Exercice 512. On note F l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ vérifiant, pour tout réel x , $f(x) = ae^x + be^{2x} + ce^{x^2}$.
Montrer que F est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et en déterminer une base.

Exercice 513. Dans le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid x + iy - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(a + ib, a - ib, a + b) : (a, b) \in \mathbf{C}^2\}.$$

Déterminer une base de F , une base de G , une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$.

Exercice 514. Déterminer un supplémentaire dans $\mathbf{R}^4$ de

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}.$$

Exercice 515. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de cet espace vectoriel.

1. La famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est-elle une base de E ?
2. Même question avec la famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.

Exercice 516. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$\begin{aligned} x &= (1, 2, 0, 1), & y &= (2, 1, 3, 1), & z &= (7, 8, 9, 5), & t &= (1, 2, 1, 0) \\ u &= (2, -1, 0, 1), & v &= (-1, 1, 1, 1), & w &= (1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Posons

$$A = \text{Vect}(x, y, z) \quad \text{et} \quad B = \text{Vect}(t, u, v, w).$$

1. Déterminer la dimension et une base de A et de B .
2. Déterminer la dimension et une base de $A + B$.
3. Déterminer la dimension et une base de $A \cap B$.

Exercice 517. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $e_k = \sum_{\ell=0}^k X^\ell$.

1. Démontrer que $(e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer les coordonnées du polynôme $P_k = X^k$ dans cette base.

Exercice 518. On considère $n + 1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ vérifiant $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - x_k)$.

1. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, vérifier que $P_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$ et $P_i(x_i) \neq 0$.
2. En déduire que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbf{R}_n[X]$. Est-elle génératrice ?

Exercice 519. On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.
Prouver que $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = F \oplus G$.

Exercice 520. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{K}^4$.

Justifier que $E_1 = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbf{K}^4$, puis donner l'expression de la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Exercice 521. Déterminer un supplémentaire de $\{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Exercice 522. Déterminer un supplémentaire de $\{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Exercice 523. Dans $E = \mathbf{R}^4$, on considère $a = (1, 2, 0, 1)$, $b = (2, 1, 3, -1)$, $c = (4, 5, 3, 1)$ et $F = \text{Vect}(a, b, c)$.

1. Déterminer la dimension et une base de F . Déterminer un système d'équations de F .
2. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y + z + t = 0 \text{ et } x + z - t = 0\}$. Déterminer une base de G et sa dimension.
3. Montrer que $F \oplus G = E$. Donner la décomposition selon F et G du vecteur $s = (6, 10, 8, 2)$.

Exercice 524. Soit D l'ensemble des matrices diagonales de $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et F le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que D et F sont supplémentaires dans E .

Exercice 525. Déterminer les dimensions du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{ll} u : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3 & v : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - y, x + 2y) & (x, y, z) \longmapsto (x + y - z, 2x - y + z) \\ w : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 & r : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + y + z, y + z, x) & (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y + z) \\ \varphi : \mathbf{K}_3[X] \longrightarrow \mathbf{K}_4[X] & \\ P \longmapsto X(P' - P'(0)) & \end{array}$$

Exercice 526. Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$u : \mathbf{R}_2[X] \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad v : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ P \longmapsto (P(-1), P(0), P(1)) \quad (x, y, z) \longmapsto (3x + y - z, 2x - y, 2x - z).$$

Exercice 527. 1. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbf{K}^2$ tel que $x_0 \neq x_1$. Montrer que

$$\mathcal{B} = ((X - x_0), (X - x_1))$$

est une base de $\mathbf{K}_1[X]$. Soit $P \in \mathbf{K}_1[X]$. Déterminer, en fonction de $P(x_0)$ et $P(x_1)$, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit un triplet $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{K}^3$ de scalaires deux à deux distincts. Montrer que

$$\mathcal{B} = ((X - x_1)(X - x_2), (X - x_0)(X - x_2), (X - x_0)(X - x_1))$$

est une base de $\mathbf{K}_2[X]$. Soit $P \in \mathbf{K}_2[X]$. Déterminer, en fonction de $P(x_0)$, $P(x_1)$ et $P(x_2)$, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $x_0, \dots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$P_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

- (a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Vérifier que $P_k \in \mathbf{K}_n[X]$ et calculer $P_k(x_j)$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- (b) Montrer que $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
- (c) Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Déterminer, en fonction des nombres $P(x_k)$, les coordonnées de P dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.
- (d) Montrer que l'application

$$T : \mathbf{K}_n[X] \longrightarrow \mathbf{K}^{n+1} \\ P \longmapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Déterminer son application réciproque.

Exercice 528. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ avec $a^2 + 4b \neq 0$. Soit $E = \{u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
2. Montrer que l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{C}^2$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de E .
4. Déterminer les suites géométriques non nulles qui sont éléments de E .
5. En déduire une base de E . Quel résultat vient-on de retrouver ?

Exercice 529. Donner, si possible, un exemple d'endomorphisme de $E = \mathbf{K}^2$:

- (a) dont le noyau est réduit à $\{(0, 0)\}$;
- (b) dont le noyau et l'image sont non nuls et distincts ;
- (c) dont le noyau est égal à l'image ;
- (d) dont le noyau est égal à E .

Reprendre les mêmes questions dans $E = \mathbf{K}^3$.

Exercice 530. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et u, v deux endomorphismes de E .

1. Montrer que $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ et en déduire que

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

2. On suppose que $v \circ u = 0$ et que $\text{Ker}(u + v) = \{0\}$. Montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$.

Exercice 531. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f en endomorphisme de E .

1. Montrer que les assertions (1) $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ et (2) $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ sont équivalentes.
2. Montrer ensuite que ces deux assertions sont équivalentes à l'assertion (3) $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Exercice 532. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = \text{Id}$.

1. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Im}(f - \text{Id})$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 533. Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3. Soit u un endomorphisme non bijectif de E tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que pour tout $y \in \text{Im}(u)$, $u^2(y) = -y$.
2. Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.
3. Soit $a \in \text{Im}(u)$ tel que $a \neq 0_E$. Montrer que la famille $(a, u(a))$ est libre. Déterminer le rang de u .

Exercice 534. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Démontrer que

$$(\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)) \iff (u^2 = 0 \text{ et } \dim(E) = 2\text{rg}(u)).$$

Exercice 535. Soit E, F, G trois $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On note $v = g|_{\text{Im}(f)}$.

1. Montrer que $\text{Ker}(v) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(v) = \text{Im}(g \circ f)$.
2. En déduire que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f))$.
3. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(F)$.

Exercice 536. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension $n > 0$. Un endomorphisme f de E est dit **nilpotent** s'il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0$.

Soit u un endomorphisme nilpotent et soit $p_0 = \min \{p \in \mathbf{N} \mid u^p = 0\}$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p_0-1}(a) \neq 0_E$.
2. Montrer que la famille $(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{p_0-1}(a))$ est libre.
3. En déduire que $p_0 \leq n$.