
Représentation matricielle des applications linéaires

Exercice 537. Introduisons les applications linéaires :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y, 2x). \end{array}$$

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y, 3x + y + z, y - z), \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & P + P' \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ (x, y, z) & \longmapsto & x(X + 1)^2 - y(X - 1)^2 + z(X^2 - 1) \end{array}$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & {}^t M \end{array}$$

(a) Donner les matrices de ces applications linéaires dans les bases canoniques.

(b) Parmi ces applications linéaires, lesquelles sont bijectives ?

Exercice 538. Posons $E = \text{Vect}(\{x \mapsto 1, \sin, \cos\})$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie. En donner une base $\mathcal{B}$ et la dimension.
2. On définit sur E l'application u par

$$u(f) = f + f' + f''.$$

Montrer que u est un endomorphisme de E , et déterminer sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. u est-il un automorphisme de E ? Dans ce cas, expliciter u^{-1} .

Exercice 539. On note f l'application définie sur $\mathbf{R}_3[X]$, à valeurs dans $\mathbf{R}_3[X]$, qui à un polynôme P associe son reste dans la division euclidienne par $X^2 - X + 1$.

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$, et vérifier, avec celle-ci, que f est un projecteur.
3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 540. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 541. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 542. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les familles suivantes :

$$\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7)).$$

Vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbf{R}^3$, et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Exercice 543. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On introduit les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (2; 1; 2), \quad v_2 = (0; 1; 3), \quad \text{et} \quad v_3 = (2; 0; 3).$$

Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et, à l'aide des formules de changement de base, déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 544. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $f^2 = 0$. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pourra faire l'analyse au brouillon : si une telle base (e_1, e_2, e_3) existe, que peut-on dire des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$?

Exercice 545. On considère l'application linéaire u de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est de rang 3.
2. Construire une base e de $\mathbf{R}^4$ et une base f de $\mathbf{R}^3$ telles que la matrice représentant u dans les bases e et f soit donnée par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 546. Soit $F = \{x, y, z\} \in \mathbf{R}^3 \mid x = z\}$ et G la droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ engendrée par le vecteur $u = (1, 0, -1)$.

1. Déterminer une base (v, w) de F , et vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G . Donner la matrice de p relativement à la base (u, v, w) .
3. En déduire la matrice de p relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 547. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e_1 + e_3, 3e_2 - e_3, 2e_1 - e_2)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme f vérifiant

$$f(e_1 + e_3) = 2e_2 \quad f(3e_2 - e_3) = 7e_1 - e_2 + 6e_3 \quad f(2e_1 - e_2) = 4e_1 + 2e_2 + 6e_3.$$

3. En déduire à l'aide des formules de changement de base la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 548. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ défini par $\phi(M) = AM - MA$.

1. Expliciter la matrice de ϕ relativement à la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de ϕ , leur dimension, et une base de chacun d'eux.
3. Justifier que $\text{Ker } \phi$ et $\text{Im } \phi$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
4. Déterminer la matrice de ϕ dans une base adaptée à $\text{Ker } \phi$ et $\text{Im } \phi$.

Exercice 549. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x; y; z) & \longmapsto & (x - y - z; -x + y - z; -x - y + z). \end{array}$$

On introduit de plus les vecteurs $a = (1; 1; 1)$, $b = (1; -1; 0)$, et $c = (1; 0; -1)$.

1. Vérifier que la famille (a, b, c) est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice représentative de f dans cette base, que l'on note A .
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer A^n et en déduire la matrice représentative de f^n dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ (la puissance dans l'écriture f^n représente ici une composée d'endomorphismes).
4. On introduit les suites u , v , et w définies par leur premier terme $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, et $w_0 = 2$, et par les relations de récurrences :

$$u_{n+1} = u_n - v_n - w_n, \quad v_{n+1} = -u_n + v_n - w_n, \quad \text{et} \quad w_{n+1} = -u_n - v_n + w_n.$$

Déterminer l'expression du terme général de chacune de ces trois suites.

Exercice 550. Déterminer une base du noyau et de l'image des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$