

Déterminant

Exercice 551. Calculer les déterminants suivants :

$$(a) \begin{vmatrix} j & j \\ -1 & j \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 22 & 44 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$$

$$(i) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(j) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(k) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(l) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 552. Montrer que le déterminant d'une matrice anti-symétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 553. En utilisant les déterminants, décider si

1. La famille $((1, 3, 2), (1, 2, -1), (0, 1, 3))$ est une base de $\mathbf{R}^3$
2. la famille $((1, -i, -1), (i, 1, -i), (-1, i, 1))$ est une base de $\mathbf{C}^3$.
3. la famille $(1 + X - X^2, 3 - X + 5X^2, -1 + 2X + 3X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 554. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Déterminer le déterminant de la matrice $A - \lambda \text{Id}$.
2. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $\text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$ n'est pas réduit à l'élément nul.
3. Pour chacune de ces valeurs, trouver une base de $\text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$.
4. Vérifier que la réunion de ces bases fournit une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
5. Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Prouver sans calcul de produit matriciel que $P^{-1}AP$ est diagonale.
6. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'expression de A^k en fonction de k .

Exercice 555. Pour quelle valeur du paramètre m la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 556. Calculer le déterminant de l'application linéaire suivante

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbf{R}_3[X] \\ P &\longmapsto XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1) \end{aligned}$$

Qu'en déduit-on sur f ?

Exercice 557. Soit a, b, c trois nombres complexes. Exprimer les déterminants suivants sous la forme la plus factorisée possible :

$$(a) \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 558. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, note D_n le déterminant de la matrice d'ordre n de coefficients notés $d_{i,j}$ avec $d_{i,i} = 3$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d_{i+1,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $d_{i,i+1} = 2$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $d_{i,j} = 0$ pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $j \notin \{i-1; i; i+1\}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n.$$

2. En déduire l'expression de D_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 559. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note d_n le déterminant de la matrice A_n d'ordre n suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos(\theta) & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer d_1 et d_2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$d_{n+2} = 2\cos(\theta)d_{n+1} - d_n.$$

3. En déduire l'expression du terme général de la suite (d_n) .

Exercice 560 (Déterminant de Vandermonde). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère

$$V : (a_1, \dots, a_n) \mapsto \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer par récurrence que pour tous $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$, $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.