
Espaces euclidiens

Exercice 561. Dans chacun des cas suivants, décider si l'application φ introduite est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E :

1. $E = \mathbf{R}_2[X]$ et pour tous $P, Q \in E$,

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

2. $E = \mathbf{R}_n[X]$, $x_0, \dots, x_n$ sont des nombres réels deux à deux distincts et pour tous $P, Q \in E$,

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k).$$

3. $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ et pour tous $f, g \in E$,

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (1-t)f(t)g(t) dt.$$

4. $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ et pour tous $f, g \in E$,

$$\varphi(f, g) = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

Exercice 562. 1. Soient E un espace préhilbertien et f un endomorphisme de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad \forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\| \qquad (2) \quad \forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

2. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E vérifiant pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 563. Soit E un espace préhilbertien.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Pourquoi cette égalité est-elle appelée identité du parallélogramme ?

2. En déduire que pour tous $x, y, z \in E$,

$$\|x - z\|^2 \leq 2(\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2).$$

3. Soit $x, y \in E$. Montrer que

$$\|x\| = \|y\| \iff (x + y) \perp (x - y) \qquad x \perp y \iff \|x + y\| = \|x - y\|$$

Quelles sont les interprétations géométriques de ces propriétés ?

Exercice 564. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

Exercice 565. Soient $x_1, \dots, x_n$ n nombres réels strictement positifs tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2.$$

Examiner le cas d'égalité.

Exercice 566. Soient a, b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\ln b - \ln a \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Exercice 567. Montrer que l'application suivante est un produit scalaire :

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x; y), (x'; y')) &\longmapsto 3xx' + xy' + yx' + yy'. \end{aligned}$$

Déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}^2$ pour ce produit scalaire.

Exercice 568. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base $(e_1; e_2; e_3)$ où

$$e_1 = (1; 1; 0), \quad e_2 = (1; 0; 1) \quad \text{et} \quad e_3 = (0; 1; 1).$$

Exercice 569. L'espace $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$ est muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Orthonormaliser dans cet espace préhilbertien la famille

$$(t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto \exp(-t)).$$

Exercice 570. On considère $E = \mathbf{R}_2[X]$, muni de l'application définie par $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Prouver que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R}_1[X]$ et celui de $\text{Vect}(X)$ dans E muni de ce produit scalaire.

Exercice 571. Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ du produit scalaire usuel. Introduisons le sous-espace vectoriel de E défini par

$$H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

1. Soit $f \in H^\perp$. A l'aide de la fonction $g : t \mapsto tf(t)$, montrer que f est nulle.
2. En déduire $H^\perp$ et $(H^\perp)^\perp$.

Exercice 572. Soit E un espace préhilbertien. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

$$F^\perp \cap F = \{0\} \quad F \subset F^{\perp\perp} \quad F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp \quad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

Exercice 573. On définit la trace d'une matrice carrée A , notée $\text{tr}(A)$, comme la somme des coefficients de sa diagonale principale. On définit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) &\longmapsto \text{tr}(A^T B) \end{aligned}$$

1. Montrer l'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est linéaire et que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$.
2. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Prouver que f est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ muni de ce produit scalaire est un espace euclidien et montrer que la base canonique en est une base orthonormale.
5. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\text{tr}(A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A).$$
6. Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 574. Pour tous $A, B \in \mathbf{R}_n[X]$, on pose $\langle A, B \rangle = \int_{-1}^1 A(x)B(x)(1+x^2) dx$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Construire une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 575. On travaille dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On introduit l'espace vectoriel

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}.$$

On note p la projection orthogonale sur A .

1. Déterminer la matrice représentant p dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer la distance du vecteur $v = (-3, 1, 0, 2)$ à A .

Exercice 576. 1. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ ((x; y; z), (x'; y'; z')) & \longmapsto & xx' + xy' + yx' + 2yy' + 2yz' + 2zy' + 5zz' \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

2. Notons P le plan d'équation $z = 0$. Déterminer l'expression de la projection orthogonale (relativement au produit scalaire f) de $\mathbf{R}^3$ sur P .

Exercice 577. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une projection orthogonale ($\mathbf{R}^3$ est bien sûr muni du produit scalaire canonique) sur un plan P que l'on précisera.

Exercice 578. 1. Montrer que l'application $u : (P; Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ munit $\mathbf{R}_2[X]$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien.

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. En déduire

$$\min_{(a; b) \in \mathbf{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

Exercice 579. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques sur $\mathbf{R}$. Pour tout $f, g \in E$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

On admet que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

1. Justifier que pour $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$.
2. Rappeler les formules donnant la linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.
3. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on définit les fonctions f_k et g_k par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_k(x) = \cos(kx) \text{ et } g_k(x) = \sin(kx)$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est orthonormale.

4. Que peut-on dire de la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$?
5. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\cos$ et $f : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u = \sin^2$.

Exercice 580. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme f de E est autoadjoint si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

1. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E .
 - (a) Montrer que la matrice représentant f dans une base orthonormale de E est une matrice symétrique.
 - (b) Montrer que $\text{Im}(f)$ est l'orthogonal de $\text{Ker}(f)$.
2. Soit p un endomorphisme de E . Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $p^2 = p$ et p est autoadjoint.