
Séries numériques

Exercice 581. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Exercice 582. Dans chacun des cas suivants, montrer la convergence et calculer la somme de la série dont le terme général est

- | | | | | | | | |
|------|------------------------|------|-----------------------|-------|---------------------|--------|---|
| (i) | $\frac{1}{2^k}$ | (ii) | $\frac{4}{5^k}$ | (iii) | $\frac{1}{k!}$ | (iv) | $\frac{1}{2^{2k}}$ |
| (v) | $\frac{2^k}{5^{k-1}}$ | (vi) | $\frac{2^k+3^k}{7^k}$ | (vii) | $\frac{2}{3^{k+1}}$ | (viii) | $\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$ |
| (ix) | $\frac{e^{-2}2^k}{k!}$ | (x) | $\frac{2}{3^{2k+1}}$ | (xi) | $\frac{(-1)^k}{k!}$ | (xii) | $\frac{1}{(2k)!}$ |

Exercice 583. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

puis calculer sa somme après avoir mis u_n sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.

Exercice 584. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right),$$

puis calculer sa somme après avoir reconnu une série télescopique.

Exercice 585. Introduisons la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{e^n + e^{-n}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $u_n \leq e^{-n}$. En déduire la nature de la série, puis une majoration de sa somme.

Exercice 586. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et montrer que la suite (S_n) de ses sommes partielles est équivalente à la suite de terme général $2\sqrt{n}$.

Exercice 587. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série dont le terme général est :

- | | | | | | | | |
|--------|---|---------|----------------------------------|-------|---|--------|--|
| (i) | $\frac{n+2}{n^3+1}$ | (ii) | $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ | (iii) | $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ | (iv) | $\frac{n-1}{3^n}$ |
| (v) | $\frac{4n^2+5n}{5^n}$ | (vi) | $\frac{1}{\ln(n)}$ | (vii) | $\frac{2^n-n}{3^n}$ | (viii) | $e^{-\sqrt{1+n}}$ |
| (ix) | $\frac{1+n}{n^3(n+\ln n)}$ | (x) | $\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ | (xi) | $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ | (xii) | $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$ |
| (xiii) | $\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ | (xiv) | $\frac{n^2}{n!}$ | (xv) | $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ | (xvi) | $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ |
| (xvii) | $n \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ | (xviii) | $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ | (xix) | $\frac{\cos n}{n^2+3n-2}$ | (xx) | $\cos\left(\frac{n}{n+1}\right)$ |

Exercice 588. Dans chacun des cas suivants, déterminer, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{n^\alpha}\right) \quad u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha.$$

Exercice 589. Soit $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$. On définit par récurrence la suite (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = e^{-u_n} u_n.$$

1. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
2. Prouver que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}).$$

3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 590. Introduisons la suite u de terme général

$$u_n = \frac{n!}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

1. Montrer que les suites de termes généraux $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et $-\frac{1}{12n^2}$ sont des suites équivalentes.
2. En déduire que la suite u converge.

Exercice 591. Soit (a_n) une suite décroissante convergeant vers 0.

1. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge. Si (S_n) désigne la suite des sommes partielles de cette série, on pourra montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites adjacentes.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left| \sum_{k>n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

Exercice 592. Soit u une suite de réels strictement plus grands que -1 .

1. Montrer que si u est une suite de réels tous de même signe, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1 + u_n)$ sont de même nature.
2. Montrer que sans cette hypothèse, ce n'est plus nécessairement le cas. On pourra considérer la suite u de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 593. Soit f une fonction non nulle continue et positive sur l'intervalle $[0, 1]$. On considère la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 f(t^n) dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_n \geq \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt.$$

2. En déduire la nature de la série.
3. Application : déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx.$$

Exercice 594 (Séries de Bertrand). Soit u une suite décroissante de réels positifs. On introduit la suite v définie par $v_0 = u_0 + u_1 + u_2$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$v_k = \sum_{j=2^{k+1}}^{2^{k+2}} u_j.$$

Notons (U_n) et (V_n) les sommes partielles des séries de terme général u_n et v_n .

1. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $V_n = U_{2^{n+1}}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel k non nul,

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq v_k \leq 2^k u_{2^k}.$$

3. En déduire que les séries de terme général u_n et $2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
4. Appliquer ce critère pour retrouver la nature des séries de Riemann.
5. Appliquer ce critère pour déterminer la nature des séries de Bertrand, séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont deux réels strictement positifs.