

Présentation

1 Objectif

Pour aborder sereinement le programme de mathématique de classe préparatoire, une certaine aisance technique est nécessaire. Ce document est un support pour que vous puissiez effectuer un travail régulier sur ce sujet. Il est conçu pour vous faire revoir et surtout manipuler de manière répétitive des techniques de calcul vues au collège et au lycée. Nous nous appuierons sur ces techniques dès le début de l'année. Ne soyez pas surpris de la simplicité des premiers thèmes abordés. Il faut impérativement que les outils de base soient maîtrisés et que vous puissiez faire des calculs rapidement et sans faute.

Ce document n'est pas une introduction au cours de mathématique de sup. Vous n'y trouverez aucun nouveau théorème, et n'y découvrirez aucune nouvelle technique. Ce document n'a même pas l'ambition de vous faire réviser votre cours de terminale. Certains théorèmes enseignés dans le secondaire peuvent y apparaître au détour d'un exercice de recherche, mais aucune révision systématique du cours n'est faite. Le rappel de certaines techniques peut parfois être un prétexte pour dégager un concept mathématique, comme la récurrence. Mais l'étude de ces digressions est tout à fait facultative. La première année de classe préparatoire est là pour travailler ces concepts.

2 Présentation du document

Ce document propose des rappels de cours, des exercices, mais aussi et surtout une organisation de votre travail. En effet, chaque leçon présente le travail à effectuer sur une ou deux journées au maximum. Il est impératif de suivre l'ordre des leçons et d'effectuer vos révisions de manière régulière. Il faut absolument mémoriser le cours et faire tous les exercices de chaque leçon. Prévoir entre trois et cinq semaines pour mener cette tâche à bien, en travaillant raisonnablement chaque jour, suivant le rythme que vous aurez décidé d'avoir. Si vous en avez le temps, en particulier lorsque la leçon étudiée est plus courte, prolonger ce travail obligatoire en faisant quelques exercices d'entraînement supplémentaires vous permettra d'être encore plus à l'aise pour votre première année post-baccalauréat. Les plus curieux pourront aussi étudier quelques exercices de recherche, mais cette activité est un «loisir», même si elle est formatrice. Les exercices facultatifs sont regroupés dans un document annexe. Notez que le présent document contient aussi une annexe fournissant des indications pour certains exercices et une annexe présentant les solutions de tous les exercices. Ces solutions sont extrêmement détaillées afin de mettre en évidence des points sur lesquels vous ne réfléchissez plus, tellement il vous paraissent clairs. C'est d'ailleurs le caractère très détaillé des solutions qui explique la longueur du document. Étudier les corrigés des exercices obligatoires fait partie du travail sur une leçon.

Ce document utilise beaucoup de conventions graphiques et de pictogrammes. Leur signification est détaillée dans les différents paragraphes qui suivent.

2.1 Dans toutes les parties du document

Un texte écrit sur un fond grisé apporte des informations que l'on peut ignorer sans problème. Lorsqu'ils ne sont pas complétés par un pictogramme, ces passages peuvent souligner un concept apparaissant dans le texte qui précède, donner une idée d'une preuve... Dans le cas contraire, ces passages grisés sont des compléments culturels: ouverture vers un problème mathématique classique, application du résultat d'un exercice... Les pictogrammes possibles sont



si le complément culturel est accessible à chacun.



si le complément culturel est destiné aux étudiants ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématique.



si le complément culturel est destiné aux étudiants ayant suivi l'enseignement de spécialité ISN.

La plupart de ces compléments «culturels» se trouvent dans l'annexe consacrée aux exercices de recherche. Enfin, tout mot en gras dans le texte, suivi du pictogramme  possède une définition qui se trouve dans la dernière annexe du document. Attention: chaque mot est défini la première fois qu'il apparaît dans le texte, mais pas forcément les fois suivantes.

2.2 Dans le cours

Les cadres à fond bleu sont les énoncés qu'il faut connaître par cœur et les techniques qu'il faut avoir maîtrisées. Ces énoncés sont complétés par quelques remarques précédées de



qui est un complément d'un énoncé ou d'une technique.



qui indique que ce qui suit est un exemple d'application.



qui souligne un piège «classique».

2.3 Dans tous les exercices d'entraînement



Certains numéros d'exercice sont suivis de . Ces exercices ont pour objectif de vous entraîner pour que vous soyez plus efficaces. Quel que soit votre entraînement, il vous faudra toujours prendre un papier et un crayon pour faire un calcul. Ceci étant, plus on est entraîné et moins on écrit de choses, certaines étapes des calculs se faisant «de tête». La plupart de ces étapes consistent en de légères modifications de l'écriture d'une donnée pour pouvoir manipuler cette dernière plus facilement. On cherche par exemple deux rationnels explicites tels que pour tout réel x ,

$$2x + 3 = ? \times (x + ?)$$

où chaque point d'interrogation remplace un des rationnels cherchés. Ces deux rationnels ne sont pas nécessairement égaux, même si on les a remplacés par le même symbole. En notant que le facteur numérique devant la variable x est 2, le premier point d'interrogation est 2. Il s'ensuit que la second point d'interrogation est $3/2$. On écrit donc que pour tout réel x ,

$$2x + 3 = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

Finalement, tous les exercices suivis du pictogramme «pingouin qui réfléchit» consisteront à remplacer «de tête» une série de points d'interrogation dans des formules en une ou plusieurs variables. Chaque point d'interrogation devra être remplacé par un nombre dont l'écriture est donnée, la plupart du temps un nombre explicitement connu. Donnons d'autres exemples de ce genre d'exercice.

- Remplacer chaque ? par un entier explicite afin que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^7 + 3x^5 = x^?(x^? + 3)$, consiste à écrire: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^7 + 3x^5 = x^5(x^2 + 3)$.
- Remplacer chaque ? par l'exponentielle du produit de x par un rationnel afin que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 = e^{x/2}(? + ?)$ consiste à écrire: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 = e^{x/2}(e^{x/2} + e^{-x/2})$

Ces transformations doivent être faites «de tête», mais on peut évidemment s'aider en griffonnant quelques notes sur un papier, en particulier pour commencer. Notez enfin qu'il peut parfois y avoir plusieurs réécritures valides possibles.

2.4 Dans l'annexe du document concernant les exercices de recherche

On utilise les pictogrammes suivants.



précède une question destinée aux étudiants ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématique.



précède une question destinée aux étudiants ayant suivi l'enseignement de spécialité ISN.

Certains exercices de recherche sont difficiles, parce qu'ils exigent plus de dextérité technique, parce qu'ils utilisent des résultats mathématiques évolués même s'ils ont été vus en terminale, ou parce qu'ils sont fondés sur une astuce. Afin que vous puissiez mesurer le degré de difficulté de ces exercices, leur titre est suivi du pictogramme , répété entre une et trois fois, les exercices suivis de trois «tasses de café» étant les plus délicats. Je vous rappelle cependant que tous les exercices de recherche sont facultatifs.

3 Conseils pour bien exploiter ce document

Le travail sur diverses techniques mathématiques que vous commencez aujourd'hui sera continué et approfondi en sup, puis en spé. Nous verrons ensemble des techniques plus élaborées, qui sont toutes fondées sur les calculs «simples», que vous avez appris et répétés depuis le collège. Lorsque vous utiliserez ce document, souvenez-vous de plusieurs points.

- Avancez à votre rythme dans les calculs. L'objectif principal n'est pas de calculer vite mais de calculer juste. La vitesse viendra lorsque les calculs travaillés seront des réflexes. Atteindre cette dextérité n'est d'ailleurs pas un objectif.
- Traitez les leçons dans l'ordre sans négliger les premières, même si elles vous paraissent sans intérêt. En effet, pour être performant sur des calculs «complexes» comme la recherche de primitives, il faut parfaitement maîtriser le calcul fractionnaire, les techniques de développement et de factorisation... et pouvoir prévoir les résultats de manipulations élémentaires avant de les faire. Ceci demande beaucoup d'entraînement sur les points de base et ce document est écrit pour vous faire voir et revoir ces points au fur et à mesure de l'avancée des leçons.
- Si on excepte les exercices de «calcul mental», travaillez impérativement par écrit, sans sauter d'étapes. Chaque étape d'un calcul doit être fondée sur une règle opératoire précise que l'on applique rigoureusement et que l'on doit être capable de citer.
- Lorsqu'un exercice a pour objectif de faire plusieurs calculs du même type, lisez le corrigé de chaque calcul avant d'aborder les calculs suivants. Il est en effet inutile de faire trois calculs avec trois fois la même erreur. Lire le corrigé de chaque calcul effectué vous permet d'aborder les calculs suivants avec plus d'assurance.
- Lorsque vous cherchez un exercice de révision, il n'est pas inutile de relire le cours concerné, même si vous êtes sûr de le connaître parfaitement. Par ailleurs, ceux qui font des exercices supplémentaires d'entraînement peuvent résoudre des exercices sur le thème du jour mais aussi sur les leçons passées.
- Entraînez vous régulièrement. Il est inutile de résoudre cinquante équations du second degré pendant une semaine, pour ne plus jamais en croiser une pendant des mois. En particulier, ceux qui chercheront les exercices d'entraînement facultatifs auront intérêt à faire un ou deux calculs de chaque exercice chaque jour (un développement, une factorisation, une manipulation de racine carrée...), plutôt que faire tous les calculs d'un exercice ne proposant que des développements un jour pour faire tous ceux d'un exercice suivant consacré aux racines carrées le lendemain.

Ce document est une première version. Malgré deux relectures attentives, nul doute qu'il doit rester des erreurs: coquilles typographiques mais aussi des fautes de calculs! Si vous repérez de telles erreurs, ou si vous avez une question sur un point de cours, une technique, un exercice... vous pouvez me contacter via l'adresse poinca.prepa.math@blgn.fr.

Bon courage!

Première leçon

1 Manipulation des fractions

1.1 Cours

À mémoriser

Soit a, b, c et d quatre complexes tels que b et d soient non nuls.

$$(F1) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$(F2) \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$(F3) \quad \text{Si } c \text{ n'est pas nul, } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$



Lorsque l'on fait des quotients de fractions en utilisant l'identité (F3), il faut écrire convenablement les fractions afin de ne pas confondre des objets différents. En effet, si a, b et c sont trois complexes, les deux derniers n'étant pas nuls, il ne faut pas confondre

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a \times 1}{b \times c} = \frac{a}{bc} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{1 \times c} = \frac{ad}{c}$$

Il est donc **impératif** de bien placer le signe « = ».

Technique

- Les fractions doivent être simplifiées au fur et à mesure que l'on avance dans les calculs.
- En pratique, lorsque l'on effectue l'addition de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, il ne faut pas choisir systématiquement comme dénominateur commun de la somme le nombre bd mais un multiple de b et d le plus simple possible.



Lorsque les dénominateurs mis en jeu dans une somme de fractions sont numériquement connus, on choisit le dénominateur commun le plus petit possible. Par exemple

$$\frac{3}{16} - \frac{1}{24} = \frac{9}{48} - \frac{2}{48} = \frac{7}{48}$$

On n'a pas choisi le dénominateur 16×24 , bien plus grand, qui nous aurait conduit à trouver un résultat difficile à simplifier. De manière analogue, lorsque les dénominateurs mis en jeu dans une somme de fractions sont littéraux, on n'utilise pas nécessairement le produit de ces nombres comme dénominateur de la somme. Par exemple, si n est un entier naturel non nul,

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n} - \frac{5}{4n+2} = \frac{2n}{2n(2n+1)} + \frac{2(2n+1)}{2n(2n+1)} - \frac{5n}{2n(2n+1)} = \frac{2n + (4n+2) - 5n}{2n(2n+1)} = \frac{n+2}{2n(n+1)}$$

En remarquant que $4n+2 = 2 \times (2n+1)$, on a pu ne pas choisir le dénominateur commun $n \times (2n+1) \times (4n+2)$, qui aurait conduit à des calculs beaucoup plus lourds.

1.2 Entraînement

Exercice 1

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une **fraction irréductible** ?

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{24} - \frac{1}{16}, \quad C = \frac{\frac{7}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}, \quad D = \frac{\frac{3}{4} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{12}}{2 - \frac{4}{3}}$$

Exercice 2

Écrire chacun des nombres suivant sous la forme d'une unique fraction. Dans ces calculs, a et b sont choisis de telle sorte que les dénominateurs manipulés ne soient pas nuls.

$$A = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}, \quad B = \frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+2}, \quad C = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{2a+2}$$



Exercice 3

Remplacer chaque ? des identités suivantes par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout complexe x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{4/3\}$, $\frac{4x+3}{3x-4} = ? \times \frac{x+?}{x+?}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-4\}$, $\frac{5x+2}{x+4} = ? \times \frac{1+? \times x}{1+? \times x}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-3/2\}$, $\frac{3x+5}{2x+3} = \frac{? \times (2x+3)+?}{2x+3}$.

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 72 à 74. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 133 à 135.

2 Manipulation des puissances

2.1 Cours

À mémoriser

Soit a, b deux complexes. Soit m, n deux entiers naturels non nuls.

(P1) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

(P2) $(a^n)^m = a^{nm}$

(P3) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

(P4) Si b n'est pas nul, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Une puissance entière n'est jamais qu'une succession de produits. Les formules (P1) à (P4) ne sont que l'écriture des propriétés du produit entre complexes. Ainsi, si a et b sont deux complexes, on note que

- $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5 = a^{2+3}$
- $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6 = a^{3 \times 2}$
- $(a \times b)^3 = (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 \times b^3$
- Si b n'est pas nul, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$

Avec des puissances quelconques, les justifications sont les mêmes mais les écritures sont plus compliquées.

À mémoriser

Par **convention** [?], pour tout complexe non nul a et tout entier naturel n , $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Les identités (P1) à (P4) sont alors aussi valables lorsqu'on choisit pour a et b des complexes non nuls, et pour m et n des entiers relatifs.



Les propriétés à mémoriser sont des **identités** [?] qui ne sont valables que dans certains cadres. Il est indispensable d'apprendre non seulement les diverses relations mais aussi leur cadre d'application. Par exemple, les formules (P2) et (P3) sont valables si a et b sont des complexes quelconques et m et n sont des entiers naturels non nuls. On pourra généraliser (P2) au cas où a est une matrice. En revanche (P3) sera fausse dans ce cadre du calcul matriciel bien que l'on sache faire des produits de matrices.



Les quotients apparaissant comme des puissances négatives, certaines identités à mémoriser peuvent se présenter sous une forme différente de celle de l'encadré. En particulier, l'identité (P1) peut s'écrire sous la forme équivalente suivante: si a est un complexe non nul et m, n sont deux entiers relatifs, alors

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{puisque} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^n \times \frac{1}{a^m} = a^n a^{-m} = a^{n-m}$$

Comme dans le cas des puissances positives, justifier les formes générales des propriétés (P1) à (P4) consiste à écrire les définitions. Un intérêt des puissances négatives est de pouvoir regrouper en une seule famille de formules ce qui concerne les produits et ce qui concerne les quotients. On peut ainsi faire apparaître les identités (F2) et (F3) comme des cas particuliers des identités sur les puissances. Par exemple, si a, b, c et d sont quatre complexes, les trois derniers étant non nuls,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= (a \times b^{-1}) \times (c \times d^{-1})^{-1} \\ &= a \times b^{-1} \times c^{-1} \times (d^{-1})^{-1} \\ &= a \times b^{-1} \times c^{-1} \times d^{(-1) \times (-1)} \\ &= a \times (b \times c)^{-1} \times d \\ &= (a \times d) \times (b \times c)^{-1} \\ &= \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

écriture des quotients sous forme de puissances

usage de l'identité (P3)

usage de l'identité (P2)

usage de l'identité (P3)

permutation et regroupement de facteurs

écriture des puissances négatives sous forme de quotients

Le seul intérêt de cette manipulation est d'illustrer le fait que les quotients sont des cas particuliers de puissances. Elle montre aussi comment tout calcul doit être mené: chaque ligne doit être fondée sur une identité connue. Le fait qu'en pratique on n'écrit pas toutes les justifications ne doit pas masquer que le concepteur du calcul n'invente aucune règle mais applique des relations qu'il a mémorisées.

Technique

Pour simplifier des produits et des quotients de puissances, on sépare les puissances de produits de nombres différents à l'aide de (P3) et (P4), et on regroupe les puissances différentes des mêmes nombres à l'aide de (P1) et (P2). Cette remarque est tout aussi valable lorsque l'on manipule des puissances d'entiers, que l'on peut décomposer en produit de **facteurs premiers** [?].



Soit a et b deux complexes non nuls. On veut simplifier $A = \frac{a(ab^2)^2}{(a^2b)^3}$. On note que

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \times a^2 \times (b^2)^2}{(a^2)^3 \times b^3} \\ &= \frac{a \times a^2 \times b^4}{a^6 \times b^3} \\ &= a^{1+2-6} \times b^{4-3} \\ &= \frac{b}{a^3} \end{aligned}$$

usage de l'identité (P3)

usage de l'identité (P2)

usage des identités (P1) et (F2)

réécriture avec des puissances positives



Soit m et n deux entiers relatifs. On veut simplifier $A = \frac{6^{-n} \times 20^m}{15^{m-n}}$. On note que

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2 \times 3)^{-n} \times (2^2 \times 5)^m}{(3 \times 5)^{m-n}} \\ &= \frac{2^{-n} \times 3^{-n} \times (2^2)^m \times 5^m}{3^{m-n} \times 5^{m-n}} \\ &= 2^{2m-n} \times 3^{-m} \times 5^n \end{aligned}$$

Décomposition des entiers en facteurs premiers

usage de l'identité (P3)

usage des identités (P1), (P2) et (F2)

Comme dans le calcul précédent, chaque ligne est fondée sur des identités connues, que l'on a citées. Dans une rédaction pratique, on n'écrit pas toutes ces justifications mais il faut vérifier que l'on ne fait qu'appliquer des relations mémorisées.

Technique

Soit n un entier relatif. Si n est pair alors $(-1)^n = 1$. Si n est impair alors $(-1)^n = -1$.

2.2 Entraînement

Exercice 4

Écrire sous la forme d'une puissance de 10 les nombres $A = \frac{10^{-9} \times 10^4}{(10^{-3})^2}$ et $B = \frac{(10^{-3})^{-2} \times (10^4)^3}{(10^3)^2}$.

Exercice 5

Soit n un entier. Écrire sous forme d'une fraction irréductible $A = \frac{(2^5)^3 \times 15^2}{10^2}$ et $B = \frac{(-1)^{n+2} \times 12^n}{2^{2n} \times (-3)^n}$.

Exercice 6

Soit n un entier et a, b deux complexes non nuls. Trouver une écriture plus simple de $A = \frac{(ab)^2 b}{a^{3-n}}$ et de $B = \frac{2a^3 + 6(ab)^2}{(2a)^2 b}$.

Exercice 7



Remplacer chaque ? des identités suivantes par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout complexe x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(2x + 3)^3 = ? \times (x + ?)^3$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(2x + 3)^3 = ? \times (1 + ? \times x)^3$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, $(2x + 3)^4 = x^? \times \left(2 + \frac{3}{x}\right)^4$.

2.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 75 à 78. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 136 et 137.

Deuxième leçon

1 Développement d'expressions polynomiales ?

1.1 Entraînement

Exercice 8

Soit x et y deux complexes. **Développer et réduire** ? les expressions suivantes.

$$A = (x+1)(2x-3)(x+2)$$

$$C = (x+y+1)^2$$

$$B = (1-2x)^3$$

$$D = (x-y)(x+3y) - (x+y)(x-4y) + 2(x-2y)^2$$

Exercice 9

Soit x et y deux complexes. Mettre au même dénominateur les fractions suivantes, puis développer réduire leur numérateur et leur dénominateur. Dans chaque calcul, on suppose avoir choisi x et y de telle sorte que les dénominateurs mis en jeu ne soient pas nuls.

$$A = \frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x+2}, \quad B = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}, \quad C = \frac{x}{4x+2y} + \frac{y}{2x+2y} - \frac{x+y}{2x+y}$$

1.2 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs de l'exercice d'entraînement 79.

2 Imaginer les calculs

2.1 Cours

Dans tout ce qui suit, x désigne un complexe quelconque. Développer un produit consiste à choisir un terme par parenthèse apparaissant dans le produit et à faire le produit de tous ces termes. On ajoute alors les résultats obtenus pour tous les choix possibles. Par exemple, pour développer $(x+4)(2x+5)$,

choix dans le premier facteur	choix dans le deuxième facteur	produit
x	$2x$	$2x^2$
x	5	$5x$
4	$2x$	$8x$
4	5	20

Le développement cherché est donc $2x^2 + 13x + 20$. Cette vision basique des développements permet de rendre l'opération symétrique vis à vis de chaque parenthèse et de chaque terme dans les parenthèses. Pour développer $(x+1)(x+2)(x+3)$, on ne commence pas par développer $(x+1)(x+2)$ pour mener ensuite le développement par $x+3$. On imagine plutôt

premier terme	deuxième terme	troisième terme	produit
x	x	x	x^3
x	x	3	$3x^2$
x	2	x	$2x^2$
x	2	3	$6x$
1	x	x	x^2
1	x	3	$3x$
1	2	x	$2x$
1	2	3	6

Le développement cherché est donc $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Cette vision des choses ne permet pas de faire des calculs plus rapides que la méthode classique. En revanche, elle permet de faire des développements partiels de manière très efficace, si on se souvient des propriétés des puissances.



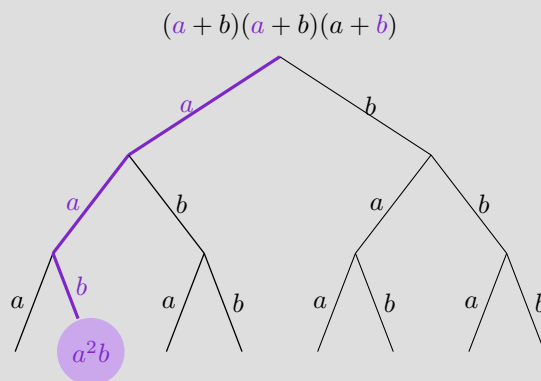
On cherche le facteur numérique devant x^2 après développement de l'expression $A = (2x + 3)(x - 4)(x^2 + 5)$. Comme on doit systématiquement choisir un terme par parenthèse, soit trois termes, il n'existe que deux types de choix qui conduisent à trouver un terme en x^2 .

- On choisit un terme en x dans deux parenthèses et un terme sans x dans la dernière. Ceci n'est possible qu'en choisissant $2x$ dans la première parenthèse, x dans la seconde, et 5 dans la dernière.
- On choisit un terme en x^2 dans une parenthèse et un terme sans x dans les deux autres. Ceci n'est possible qu'en choisissant 3 dans la première parenthèse, -4 dans la seconde et x^2 dans la dernière.

Finalement, dans le développement de A , le terme en x^2 est $2x \times x \times 5 + 3 \times (-4) \times x^2$, c'est à dire $-2x^2$.



Soit a et b deux complexes. Développer $(a + b)^3$ consiste à réaliser successivement trois expériences: choisir a ou b dans la première parenthèse, puis dans la deuxième parenthèse, puis dans la troisième parenthèse. Si on considère que le choix de a est un succès et celui de b est un échec, on peut représenter cette succession de trois expériences sous la forme classique d'un arbre. Dans l'arbre ci-contre, le chemin surligné représente les trois expériences ayant conduit aux choix successifs de a , a puis b . Avec cette vision des choses le coefficient devant le terme a^2b dans le développement de $(a + b)^3$ est le nombre de manières de choisir deux fois a lors des trois expériences, soit $\binom{3}{2}$.



Soit alors n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. En généralisant cet exposé au développement de $(a + b)^n$, le coefficient devant terme $a^p b^{n-p}$ dans le développement de $(a + b)^n$ est le nombre de manières de choisir p fois a lors de n expériences successives de choix, soit $\binom{n}{p}$. On obtient alors la formule dite du binôme de Newton, que vous démontrerez en sup par une autre méthode.

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

La forme développée d'une expression polynomiale est unique. Imaginer des développements sans les effectuer réellement permet de réécrire des expressions polynomiales sous des formes adaptées aux problèmes que l'on veut traiter. Cette technique a été utilisée dans des cas simples dans l'exercice 3.



Pour trouver deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x + a(x + 7) = b$, il suffit de noter qu'une fois déterminés ces réels, le terme en x du membre de gauche est nécessairement $2 + a$. Comme ce terme est nul dans le membre de droite, alors $a = -2$. La valeur de b est alors nécessairement -14 . Réciproquement, il est clair que ces deux valeurs conviennent.

Technique

Soit a, b, c et d des complexes tels que a et c soient non nuls.

- On peut toujours trouver des complexes u et v tels que pour tout complexe x , $ax + b = u(cx + d) + v$. Il s'ensuit qu'on peut trouver deux complexes u et v tels que pour tout complexe x vérifiant $cx + d \neq 0$,

$$\frac{ax + b}{cx + d} = u + \frac{v}{cx + d}$$

- On peut toujours trouver des complexes u, v et w tels que pour tout complexe x , $u(ax + b) + v(cx + d) = w$. Il s'ensuit qu'on peut trouver deux complexes A et B tels que pour tout complexe x vérifiant $ax + b \neq 0$ et $cx + d \neq 0$,

$$\frac{1}{(ax + b)(cx + d)} = \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d}$$



L'idée n'est pas de connaître par cœur des formules donnant ces transformations mais de connaître l'idée permettant de trouver ces réécritures dans chaque cas pratique, c'est à dire lorsque les formules sont numériques ou peu paramétrées.

- Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $3x + 1 = \frac{3}{2} \times (2x + 3) - \frac{7}{2}$ donc pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-3/2\}$, $\frac{3x+1}{2x+3} = \frac{3}{2} - \frac{7}{2(2x+3)}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $3 \times (2x + 1) - 2 \times (3x - 1) = 5$ donc pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/2, 1/3\}$,

$$\frac{1}{(2x+1)(3x-1)} = \frac{3}{5(3x-1)} - \frac{2}{5(2x+1)}$$

2.2 Entraînement

Exercice 10

Dans chacune des questions suivantes, x , y et z sont des nombres. On ne demande pas d'effectuer des développements complets des expressions considérées. L'objectif est de ne déterminer que le terme demandé en travaillant comme dans la première application technique, donc sans écrire le développement complet.

1. Déterminer le terme en x de $(2x + 1)(3x - 2)$.
2. Déterminer le terme en x^2 de $(x + 1)(3x^2 + 2x + 2)(4x^2 + 7)$.
3. Déterminer le terme en xy de $(x + y + z)^2$.

Exercice 11



Remplacer chaque ? des identités suivantes par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout complexe x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $? \times (3x - 1) + ? = 2x + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/3\}$, $\frac{4x+1}{3x+1} = ? + \frac{?}{3x+1}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $? \times (x - 1) + (2x + 1) = ?$.

Exercice 12

Montrer que pour tout triplet (a, b, c) formé d'entiers relatifs, le triplet $(c(a^2 - b^2), 2abc, c(a^2 + b^2))$ est une **solution** ? de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.



Soit n un entier naturel. Dans la première moitié du XVII^e siècle, Pierre de Fermat s'intéresse aux triplets (x, y, z) formés d'entiers naturels non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$. Lorsque $n = 2$, il existe une infinité de tels triplets. L'exercice précédent donne la forme de certaines solutions. Vous pourrez montrer en math sup que ces solutions sont les seules. Lorsque $n \geq 3$, Fermat affirma que le problème n'a aucune solution formée d'entiers tous non nuls. Alors que l'énoncé de ce problème ne met en jeu que des notions élémentaires, aucune solution ne fut trouvée en plus de trois siècles. Il a fallu attendre 1995 pour que le mathématicien britannique Andrew Wiles propose une preuve de ce résultat, preuve très complexe fondée sur des résultats très fins de théorie des nombres. Les étudiants intéressés pourront consulter le site https://fr.wikipedia.org/wiki/Dernier_théorème_de_Fermat.

2.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 80 et 81. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 138 à 142.

Troisième leçon

1 Factorisation d'expressions polynomiales ?

1.1 Cours

Opération inverse du développement, la factorisation demande beaucoup d'habitude pour repérer des formes développées, que l'on sait factoriser. Les formes les plus classiques sont les identités remarquables.

À mémoriser

Soit x et y deux nombres complexes.

$$(IR1) \quad x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

$$(IR2) \quad x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2.$$

$$(IR3) \quad x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$



La deuxième identité est la même que la première; il suffit de remplacer y par $-y$. Ceci étant, les deux identités doivent être mémorisées afin d'être immédiatement repérées dans tous les contextes.

Technique

Les identités (IR1) et (IR2) vous ont permis d'écrire une expression polynomiale de degré 2 sous forme canonique. Plus précisément, considérons a , b et c trois réels, le premier étant non nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

Cette forme d'une expression polynomiale de degré 2, dite canonique, n'est pas à connaître par cœur. On la reconstruit chaque fois qu'on en a besoin.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 1 &= 3 \left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3 \left(x^2 + 2 \times \frac{5}{6} \times x + \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{37}{36} \right) \end{aligned}$$

La mise en facteur du coefficient devant x^2 facilite le calcul, sauf si ce terme est un carré.

Construction d'un «carré parfait» avec les termes en x^2 et en x de l'expression manipulée.

Redistribuer le facteur 3 peut être utile dans certains calculs, mais cette opération ne doit pas être systématiquement effectuée.



On veut déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des réels x tels que $4x^2 + 9x + 1 = 0$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$. On note que

$$4x^2 + 9x + 1 = \left(2x + \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{65}{16} = \left(2x + \frac{9}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{65}}{4} \right)^2 = \left(2x + \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{65}}{4} \right) \left(2x + \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{65}}{4} \right)$$

en utilisant (IR3). On en déduit que $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{9}{8} - \frac{\sqrt{65}}{8}, -\frac{9}{8} + \frac{\sqrt{65}}{8} \right\}$.

L'usage de la forme canonique d'une expression polynomiale de degré 2 permet de résoudre les équations du second degré comme dans l'exemple précédent. Il permet aussi de déterminer le signe d'un trinôme du second degré. Ces usages sont tellement courants que des formules générales de résolution sont connues.

À mémoriser

Considérons a , b et c trois réels, le premier étant non nul, et posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Le réel Δ est appelé discriminant de la fonction polynomiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, la fonction f admet exactement deux points d'annulation, qui sont complexes:

$$\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, pour tout réel x , les réels a et $f(x)$ ont le même signe.

- Si $\Delta > 0$, la fonction f admet exactement deux points d'annulation, qui sont réels:

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, notons x_1 et x_2 les deux réels précédents. Pour tout réel x appartenant à $]x_1; x_2[$, les réels a et $f(x)$ sont de signes différents. Pour tout réel x appartenant à $] -\infty; x_1[$ ou à $]x_2; +\infty[$, les réels a et $f(x)$ sont de même signe.

- Si $\Delta = 0$, la fonction f admet un seul point d'annulation, qui est réel: $\frac{-b}{2a}$. Dans ce cas, pour tout réel x différent de ce point d'annulation, les réels a et $f(x)$ ont le même signe.



Le cadre précédent peut nous conduire à nous interroger sur l'intérêt de mettre une expression sous forme canonique. En fait, la connaissance de cette technique permet de simplifier la rédaction de la résolution de certaines équations, et même d'adapter cette résolution à d'autres cadres auxquels on ne pense pas de prime abord. Résolvons par exemple une équation manipulant des **congruences** [?]. On cherche les entiers relatifs p tels que $p^2 + p \equiv 2 [7]$. Soit donc $p \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} p^2 + p \equiv 2 [7] &\iff p^2 - 6p \equiv 2 [7] && \text{utilisation du fait que } p \equiv -6p [7] \\ &\iff (p - 3)^2 - 9 \equiv 2 [7] && \text{mise sous forme canonique} \\ &\iff (p - 3)^2 - 4 \equiv 0 [7] && \text{utilisation du fait que } -11 \equiv -4 [7] \\ &\iff (p - 5)(p - 1) \equiv 0 [7] \\ &\iff p - 5 \equiv 0 [7] \text{ ou } p - 1 \equiv 0 [7] \end{aligned}$$

La dernière équivalence est liée au fait que 7 est premier. Il divise donc un produit si et seulement s'il divise l'un des facteurs du produit. Finalement, l'ensemble des entiers cherchés est $\{5 + 7k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$. En approfondissant certains résultats d'arithmétique, comme le théorème de Bézout, on pourra systématiser certaines étapes de ce calcul, en particulier la première et résoudre ainsi beaucoup d'équations du second degré mettant en jeu des congruences. Pour appliquer les mêmes techniques en manipulant d'autres objets, il suffit de pouvoir ajouter et multiplier ces objets entre eux, construire «la moitié» d'un objet et extraire des racines carrées. Il faut aussi que ces différentes opérations aient de «bonnes propriétés». Cet aspect des mathématiques sera travaillé en classe préparatoire.



Les formules générales de calcul des solutions d'une équation du second degré sont inutiles lorsque l'on connaît déjà une des deux solutions cherchées. On veut par exemple résoudre l'équation $2x^2 + 4x - 6 = 0$ d'inconnue réelle x . Si on note que 1 est une solution, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x - a)$ où a est la deuxième solution cherchée. En imaginant pour tout $x \in \mathbb{R}$, le développement de $2(x - 1)(x - a)$, on note que le terme constant de ce trinôme du deuxième degré est $2a$. En identifiant avec la forme initiale, on en tire que $2a = -6$ donc $a = -3$. Finalement, la simple connaissance du fait que 1 est une solution de l'équation étudiée nous a permis de trouver très rapidement que l'autre solution est -3 . En généralisant ce calcul, on peut retenir la remarque technique qui suit.

Technique

Soit a , b et c trois réels, le premier étant non nul. Le produit des deux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, d'inconnue complexe x , est $-\frac{c}{a}$.

1.2 Entraînement

Exercice 13

En utilisant la dernière remarque technique, donc sans calculer de déterminant, donner les points d'annulation des fonctions $x \mapsto x^2 - 4x + 3$, $x \mapsto 2x^2 - x - 1$ et $x \mapsto 3x^2 - x - 4$.

Exercice 14

Soit x un complexe. Mettre sous forme canonique les expressions $A = 5x^2 + 2x + 1$ et $B = 4x^2 - 6x + 3$.

Exercice 15

Soit x et y deux complexes. Factoriser les expressions suivantes.

$$A_1 = x^4 + 18x^2 + 81$$

$$A_2 = (2x - 3)^2 - (x + 7)^2$$

$$A_3 = x^2 + 1 - (x - 1)(2x + 3) - 2x$$

$$A_4 = (4x^2 - 25)(x + 2) - (x^2 - 4)(2x + 5) + (5x + 10)(2x + 5)$$

Exercice 16

Soit x un complexe que l'on choisit dans chaque exemple de telle sorte que les dénominateurs mis en jeu ne soient pas nuls. Mettre au même dénominateur et simplifier des **expressions rationnelles** ? suivantes. On factorisera les numérateurs et les dénominateurs.

$$A = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad B = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 5)} - \frac{2}{x^2 - 1}$$

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 82 à 85. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 143 à 147.

2 Révisions

Exercice 17

Soit n un entier. Trouver une écriture plus simple de $\frac{10^{-9} \times 10^4}{(10^{-3})^2}$ et de $\frac{(-6)^{3n+2} \times 12^n}{2^n \times (-9)^n}$.

Exercice 18

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une unique fraction. Dans ces calculs, a est choisi de telle sorte que les dénominateurs manipulés ne soient pas nuls.

$$A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} - \frac{2}{2a+1}, \quad B = \frac{1}{1-a} + \frac{2}{2a-1} - \frac{1}{2a-2}$$

Quatrième leçon

1 Introduction de la valeur absolue

1.1 Cours

On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

À mémoriser

Soit x et x' deux réels.

$$(V1) \quad |-x| = |x|$$

$$(V2) \quad |xx'| = |x||x'|$$

$$(V3) \quad \text{Si } x' \neq 0 \text{ alors } \left| \frac{x}{x'} \right| = \frac{|x|}{|x'|}$$

À mémoriser

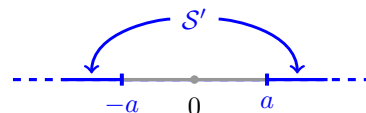
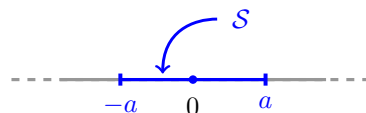
Soit x et a deux réels.

$$(V4) \quad |x| \leq a \text{ si et seulement si } x \geq -a \text{ et } x \leq a.$$

$$(V5) \quad |x| \geq a \text{ si et seulement si } x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$



- Les point (V4) et (V5) sont valables avec des inégalités strictes.
- Même si les équivalences (V4) et (V5) sont vraies pour tout réel x et tout réel a , elles n'ont aucun intérêt lorsque $a < 0$. En effet, si a est un réel strictement négatif alors pour tout réel x on sait que $|x| > a$. Une valeur absolue est en effet toujours positive donc toujours strictement plus grande que n'importe quel nombre strictement négatif.
- Les équivalences (V4) et (V5) peuvent être illustrées. Si a désigne un réel strictement positif, on peut représenter l'ensemble $\mathcal{S}$ des réels x vérifiant $|x| \leq a$ et l'ensemble $\mathcal{S}'$ des réels x vérifiant $|x| \geq a$.



Technique

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel a positif, $|x - y| \leq a$ si et seulement si $x \in [y - a; y + a]$. Cette remarque, simple réécriture du point (V4), montre que l'on peut toujours caractériser l'appartenance d'un réel à un intervalle fermé borné en utilisant des valeurs absolues.



On pose $I = [-3; 5]$. La remarque qui précède assure que l'on peut trouver un réel y et un réel strictement positif a tel que pour tout réel x , x appartient à I si et seulement si $|x - y| \leq a$. En notant que y est forcément le «point milieu» de I , on calcule $y = (5 + (-3))/2$ soit $y = 1$. Le réel a est alors la «distance» entre y et le plus grand élément de I soit $a = 5 - 1 = 4$. Finalement, un réel x appartient à I si et seulement si $|x - 1| \leq 4$.

1.2 Entraînement

Exercice 19

1. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|x - 1| > 2$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|x + 2| \leq 3$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|x + 1| \geq 2$ et $|x - 1| \leq 6$.

Exercice 20

Recopiez chacune des assertions suivante en remplaçant chaque point d'interrogation par un nombre et chaque carré blanc par un symbole de comparaison. Dans la quatrième question, il y a plusieurs solutions.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq 3$ si et seulement si $x \in [? ; ?]$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - ?| \square ?$ si et seulement si $x \in [7 ; 9]$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - ?| \square ?$ si et seulement si $x \in]-1,31 ; -1,29[$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1| \leq ?$, $x \geq 0,8$.

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 86 et 87. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 148 à 150.

2 Les racines carrées

2.1 Cours

On appelle racine carrée d'un réel positif a , et on note $\sqrt{a}$, l'unique réel positif dont le carré est a .

À mémoriser

Soit a et b deux nombres réels positifs.

$$(R1) \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$(R2) \quad \text{si } b \text{ est non nul, } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

À mémoriser

Soit a un nombre réel et n un entier relatif.

$$(R3) \quad \sqrt{a^{2n}} = |a|^n$$

Technique

- Les trois formules permettent de simplifier les radicaux numériques, ce que l'on doit faire systématiquement. Par exemple $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2} \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
- Soit x et y deux réels positifs. La troisième identité remarquable assure que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$. Cette identité permet de remplacer des différences de racines carrées par des sommes de racines carrées, ou de faire disparaître les racines carrées apparaissant au dénominateur de certaines expressions. En effet, lorsque $x \neq y$,

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$$



On veut par exemple écrire le réel $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}$ sans racine carrée au dénominateur. On note que

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{3\sqrt{5}+7}{4}$$

Le réel $\sqrt{5}+1$ s'appelle la quantité conjuguée de $\sqrt{5}-1$. La méthode mise en jeu dans le calcul précédent est donc connue sous le nom de «méthode de la quantité conjuguée».



On veut déterminer la limite de la suite $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. L'usage direct de l'expression de la suite est impossible car on est en présence d'une forme indéterminée. En effet, on étudie une différence de suites qui divergent vers $+\infty$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Sous cette forme, on note que la limite de la suite étudiée est nulle.

2.2 Entraînement

Exercice 21



Remplacer chaque ? des identités suivantes par un rationnel ou la racine carrée d'un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x variant dans l'ensemble précisé. Les nombres placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout réel x appartenant à $[-3/2; +\infty[$, $\sqrt{2x+3} = ?\sqrt{x+?}$
2. Pour tout réel x appartenant à $[-3/2; +\infty[$, $\sqrt{2x+3} = ?\sqrt{1+?x}$
3. Pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}^*$, $\sqrt{x^4+4} = x^? \sqrt{1+\frac{4}{x^?}}$

Exercice 22

Simplifier au plus l'écriture des réels suivants. En particulier aucune racine carrée ne doit apparaître dans un dénominateur.

$$A = 2\sqrt{20} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{45}, \quad B = \frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-3}, \quad \text{et} \quad C = \frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Exercice 23

Soit x un réel strictement plus grand que 3. Simplifier au plus l'écriture des réels suivants. En particulier aucune racine carrée ne doit apparaître dans un dénominateur.

$$A = \frac{1}{\sqrt{x+1}-2}, \quad B = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \quad \text{et} \quad C = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

2.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 88 à 91. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 151 et 152.

1 Établir une identité

1.1 Cours

On appelle identité une assertion logique dépendant de variables, vraie lorsque les variables appartiennent à un ensemble d'objets que l'on doit impérativement préciser. Un mot du vocabulaire courant serait «formule». Mais ces formules sont toujours précédées d'une précision sur le cadre de validité des dites formules sous la forme: «pour tout un certain ensemble de variables appartenant à un certain domaine». Vous avez vu quantité de telles identités.

- Pour tous les complexes x et y , $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
- Pour tout complexe x distinct de 1 et tout entier naturel n non nul, $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.
- Pour tous les réels strictement positifs x et y , $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.
- Pour tout complexe x distinct de $-\frac{1}{2}$, $\frac{3x + 1}{2x + 1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2x + 1)}$.
- Pour tous les réels x et y , $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.

Trouver de nouvelles identités est difficile. Pour ce faire on doit

- Retenir certaines identités classiques: c'est le cas des deux premières identités précédentes.
- Retenir certaines méthodes de construction d'identités
 - transformation des expressions de la forme $\frac{ax + b}{cx + d}$ et $\frac{1}{(ax + b)(cx + d)}$ (voir la page 9),
 - mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré (voir la page 11),
 - technique de la «quantité conjuguée» pour les racines carrées (voir la page 15).

Établir une identité que l'on vous donne est un peu plus facile, en particulier si cette identité ne fait appel qu'aux opérations algébriques $+$, $-$, $\times$ et $/$. Dans le cas d'une identité qui se présente sous la forme d'une égalité, les techniques de développement suffisent. Dans le cas d'une identité qui se présente sous la forme d'une inégalité, les techniques de factorisation deviennent nécessaires.



Montrons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, $x^2 + xy + y^2 = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$.

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - y^3}{x - y} - (x^2 + xy + y^2) &= \frac{x^3 - y^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y} \\ &= \frac{x^3 - y^3 - (x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3)}{x - y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, $x^2 + xy + y^2 = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$.

La dernière étape de la preuve précédente est essentielle. Elle consiste à noter que l'on a établi la relation voulue dès que l'on choisit deux réels quelconques mais distincts. On peut donc écrire que la relation est vraie **pour tout** couple de réels distincts. On dit que l'on fait une quantification universelle. Pour un mathématicien, les lettres x et y apparaissant dans la dernière ligne sont muettes. Elles peuvent être remplacées par d'autres lettres.



Montrons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note que $\frac{x^2 + y^2}{2} - |xy| = \frac{x^2 + y^2 - 2|xy|}{2} = \frac{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|}{2} = \frac{(|x| - |y|)^2}{2}$. Comme le carré d'un réel est toujours positif, on en déduit que $\frac{x^2 + y^2}{2} - |xy| \geq 0$. La formule ayant été prouvée dès que l'on choisit deux réels quelconques, on a établi l'identité voulue.

1.2 Entraînement

Exercice 24

Montrer que pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2$.



L'identité prouvée est un cas particulier de l'identité de Lagrange. Elle est aussi connue sous le nom d'identité de Brahmagupta. Elle s'interprète très simplement si on travaille dans $\mathbb{C}$. Considérons en effet quatre réels x, x', y et y' . On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. La formule de Lagrange s'écrit alors $|z|^2 \times |z'|^2 = |z \times z'|^2$, ce qui est une propriété bien connue. Même si cette identité semble simple, c'est un des outils essentiel de plusieurs preuves, en particulier de la preuve du théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante sur un entier naturel pour qu'il soit la somme de deux carrés. Pour une présentation de ce problème et quelques idées autour de l'usage de l'identité de Lagrange dans sa résolution, vous pourrez consulter https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_deux_carrés_de_Fermat.

Exercice 25

Montrer que pour tout $x \in [0; 1], x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 26

Démontrer chacune des identités qui suit.

1. Pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (xx' + yy')^2 \leq (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$
2. Pour tout $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6, (xx' + yy' + zz')^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)$



- La formule de la question 1 a une interprétation géométrique simple. On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') . Après calcul de la racine carrée de chaque membre de l'identité, la formule se réécrit

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

où $\vec{u} \cdot \vec{v}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La formule de la question 2 s'interprète de manière analogue dans l'espace. Vous reviendrez en sup sur cette interprétation, vous permettant de donner un sens géométrique à des identités numériques.

- Vous généraliserez les formules des questions 1 et 2 en sup. Ainsi, si n désigne un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont $2n$ réels, on peut montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 92 à 96. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 153 à 158.

2 Révisions

Exercice 27

Soit x un complexe. Mettre au même dénominateur les fractions puis développer et réduire leur numérateur. On veillera à ce que les fractions soient simplifiées au maximum. Dans chaque calcul, on suppose avoir choisi x de telle sorte que les dénominateurs mis en jeu ne soient pas nuls.

$$A = \frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x+1}$$

$$B = \frac{\frac{3}{2+4x} - \frac{1}{2x}}{x - \frac{1}{x}}$$

$$C = \frac{1}{2 - \frac{3}{5 + \frac{2}{x}}} - \frac{1}{x+1}$$

Exercice 28

Soit n un entier. Simplifier l'écriture des réels $A = \frac{5^{2n} - 4^n}{5^n - 2^n}$ et $B = \frac{2^n + \sqrt{12^n}}{(\sqrt{6})^n}$.

Sixième leçon

1 Les fonctions logarithme et exponentielle

1.1 Cours

Dans ce cours, on ne s'intéresse qu'aux propriétés techniques des fonctions logarithme népérien et exponentielle. La construction de ces fonctions a été ébauchée dans votre cours de terminale. Elle sera reprise et approfondie dans votre cours de sup.

À mémoriser (Propriétés du logarithme népérien)

Soit x et y deux réels strictement positifs.

$$(LN1) \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

$$(LN2) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

$$(LN3) \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{\ln(x)}{2}.$$



Soit x un réel strictement positif et n un entier relatif. Les points (LN1) et (LN2) assurent que $\ln(x^n) = n \ln(x)$.
En particulier $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

À mémoriser (Propriétés de l'exponentielle)

Soit x et y deux réels.

$$(ER1) \quad e^{x+y} = e^x e^y.$$

$$(ER2) \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

$$(ER3) \quad \sqrt{e^x} = e^{x/2}.$$



Soit x un réel et n un entier relatif. Les points (ER1) et (ER2) assurent que $(e^x)^n = e^{nx}$. En particulier $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

À mémoriser (Liens entre logarithme népérien et exponentielle)

$$(LE1) \quad \text{Pour tout réel } x, \ln(e^x) = x.$$

$$(LE2) \quad \text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } e^{\ln(x)} = x.$$



En 1614, l'écossais John Napier, connu en France sous le nom de Neper, publie le traité *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* dans lequel il dégage ex-nihilo le concept de logarithme et présente des tables pour cette fonction. La fonction notée Log est en fait la restriction sur $]0; 1[$ de la fonction $x \rightarrow -\ln(x)$, cette restriction étant liée au fait que la fonction a été construite pour calculer des logarithmes de sinus, seuls utiles aux astronomes. En 1619, deux ans après la mort de Neper, paraît *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Y est exposé le procédé que Neper a utilisé pour calculer ses tables. Il établit en premier lieu que pour tout réel ε appartenant à $]0; 1[$,

$$\varepsilon < \text{Log}(1 - \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

Il applique cette relation à $\varepsilon = 10^{-7}$ et obtient $\text{Log}(1 - 10^{-7}) \simeq 10^{-7}$. Neper calcule ensuite les logarithmes de deux nombres qu'il appelle «fondamentaux», à savoir $A = 0,99$ et $B = 0,9995$ en déterminant deux entiers naturels p et q tels que

$$\begin{cases} (1 - 10^{-7})^{p+1} < A < (1 - 10^{-7})^p \\ (1 - 10^{-7})^{q+1} < B < (1 - 10^{-7})^q \end{cases}$$

Il note alors que $\text{Log}(A)$ est compris entre $p \text{Log}(1 - 10^{-7})$ et $(p + 1) \text{Log}(1 - 10^{-7})$ et approche ce réel par la moyenne des deux extrêmes. Il opère de même pour B . Autrement dit, il pose

$$a = \frac{2p+1}{2} 10^{-7} \quad \text{et} \quad b = \frac{2q+1}{2} 10^{-7}$$

comme valeurs approchées respectives de $\text{Log}(A)$ et $\text{Log}(B)$. Neper dresse alors ses premières tables, qu'il appelle «radicales».

nombre	Log	nombre	Log	...	nombre	Log
1	0	B	b		B^{69}	$69b$
A	a	AB	$a + b$		AB^{69}	$a + 69b$
A^2	$2a$	A^2B	$2a + b$		A^2B^{69}	$2a + 69b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A^{69}	$69a$	$A^{69}B$	$69a + b$		$A^{69}B^{69}$	$69(a + b)$

Connaissant effectivement p et q , il peut remplacer chaque expression apparaissant dans la table précédente par une expression numérique explicite. Tous les calculs sont bien évidemment faits à la main. A partir de là, Neper calcule les logarithmes des sinus entre $1/2$ et 1 de demi-degré en demi-degré par l'intermédiaire d'une **interpolation** ? non linéaire, démarche très novatrice pour l'époque. Le schéma suivi est le suivant: si a est proche de b ,

$$\text{Log}(a) - \text{Log}(b) = \text{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = -\text{Log}\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \quad \text{donc} \quad \text{Log}(a) - \text{Log}(b) \simeq \frac{b-a}{a}$$

$$\text{et} \quad \text{Log}(a) - \text{Log}(b) = \text{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log}\left(1 + \frac{a-b}{b}\right) \quad \text{donc} \quad \text{Log}(a) - \text{Log}(b) \simeq -\frac{a-b}{b}$$

$$\text{donc} \quad \text{Log } a \simeq \text{Log } b + \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \text{ en ajoutant les deux estimations.}$$

On peut alors donner une valeur approchée de $\text{Log}(a)$ lorsque a est proche d'une valeur b dont on connaît le logarithme. Vos connaissances mathématiques vous permettront en sup d'estimer précisément l'erreur commise par Neper lors de ses approximations... et d'être ainsi étonnés par la précision de ses calculs. L'exercice de recherche 167 précise cette remarque.

1.2 Entraînement

Exercice 29

Soit x et y deux réels strictement positifs. Simplifier l'écriture des réels suivants.

$$A = e^{-\ln(x)}, \quad B = e^{\ln(x)/2}, \quad C = e^{-x+\ln(x)-2\ln(y)}, \quad \text{et} \quad D = \exp\left(\frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}\right)$$

Exercice 30

Soit x un réel. Simplifier l'écriture des réels $A = \ln(2e^x)$ et $B = \ln(\sqrt{e^x})$.

Exercice 31

Pour tout réel x , on pose $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que pour tout réel x , $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$.
2. Montrer que pour tout réel x , $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$.
3. Montrer que pour tout réel x , $g(2x) = 2f(x)g(x)$.

Exercice 32

Remplacer chaque ? des identités suivantes par l'exponentielle d'un nombre qui dépend de la variable x telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x variant dans l'ensemble précisé.

1. Pour tout réel x , $e^{2x} + 1 = ? \times (e^x + e^{-x})$
2. Pour tout réel x , $\frac{e^x + 1}{e^{2x} + 2} = ? \times \frac{1 + e^{-x}}{1 + 2e^{-2x}}$
3. Pour tout réel x , $\sqrt{e^x + 3} = ? \times \sqrt{1 + 3 \times ?}$

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 97 à 103. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 159 à 163.

2 Révisions**Exercice 33**

Calculer le carré de $\sqrt{7 - \sqrt{5}} + \sqrt{7 + \sqrt{5}}$. En déduire une expression plus simple de ce nombre.

Exercice 34

Soit x un complexe. Factoriser les expressions $A = 9(x - 2)^2 - 25(3 - x)^2$ et $B = x^2 + 5(x^2 - 4) + (6 - 3x)(x + 3) + 4(1 - x)$.

Exercice 35

Soit x un complexe. Mettre sous forme canonique $A = 3x^2 + 6x - 3$ et $B = 1 - 5x - 4x^2$.

Septième leçon

1 Manipulation des inégalités larges

1.1 Cours

À mémoriser

Soit a, b, c et d quatre réels.

(IG1) Si $a \geq b$ et $c \geq d$ alors $a + c \geq b + d$.

(IG2) Si $a \geq b \geq 0$ et $c \geq d \geq 0$ alors $ac \geq bd$.

(IG3) Si $a \geq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \geq bc$.

(IG4) Si $a \geq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \leq bc$.

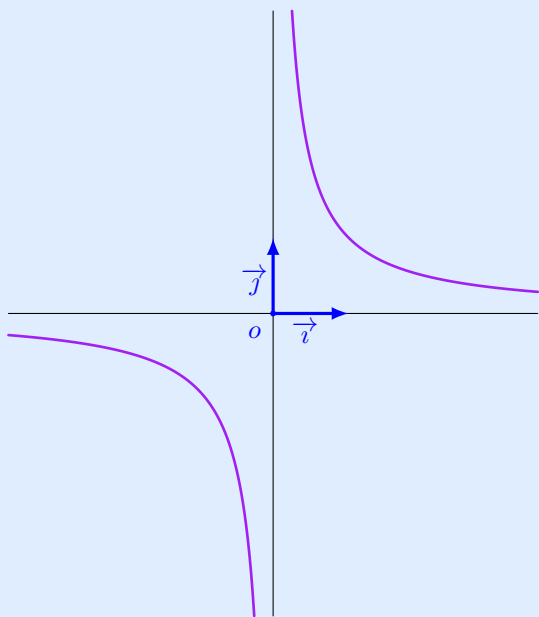


On ne peut ni soustraire, ni diviser des inégalités. Même multiplier des inégalités dont le signe des membres est inconnu conduit à écrire des bêtises.

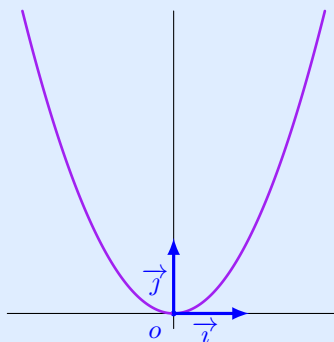
Pour gérer toutes les manipulations qui ne sont pas citées dans le premier cadre, il suffit de connaître les propriétés des fonctions usuelles, en particulier le signe des valeurs qu'elles prennent et leurs **variations** [?]. Toutes ces propriétés se retrouvent uniquement en mémorisant le **graphe** [?] de chaque fonction usuelle. Il est donc essentiel de savoir tracer rapidement les six graphes qui suivent.

À mémoriser

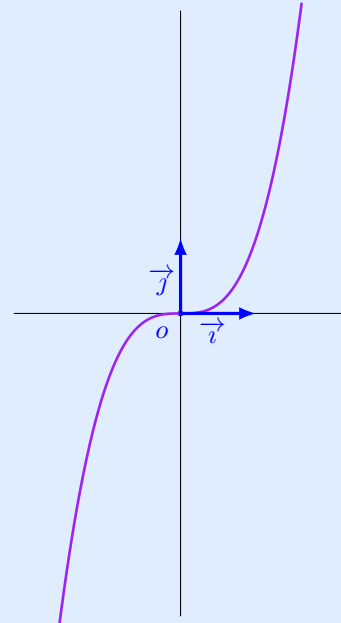
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$



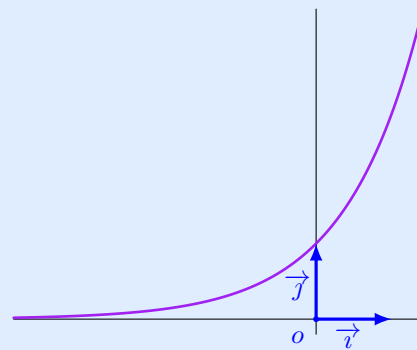
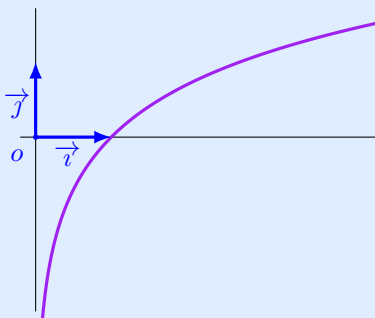
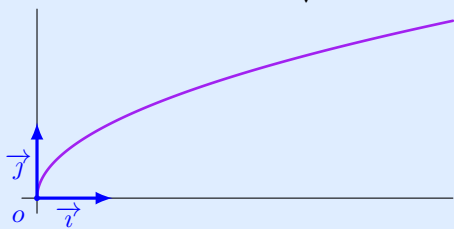
Pour tout entier naturel n pair, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^n$ a les mêmes propriétés que la fonction $x \mapsto x^2$ du point de vue qui nous intéresse ici, même si son graphe n'est évidemment pas identique. Autrement dit, c'est une fonction qui ne prend que des valeurs positives, croît sur $\mathbb{R}^+$ et décroît sur $\mathbb{R}^-$. De manière analogue, pour tout entier naturel n impair, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^n$ a les mêmes propriétés que la fonction $x \mapsto x^3$.

À mémoriser

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x\end{aligned}$$



Soit x et y deux réels tels que $x \geq y$. Pour comparer x^2 et y^2 , on peut distinguer plusieurs cas.

- Si x et y sont positifs alors $x^2 \geq y^2$ puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Si x et y sont négatifs alors $x^2 \leq y^2$ puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Si x et y sont de signe contraire, aucune conclusion n'est possible. On notera par exemple que 3 et -1 se classent dans le même ordre que leurs carrés puisque $3 \geq -1$ et $3^2 \geq (-1)^2$. Mais 3 et -6 se classent dans l'ordre inverse de leurs carrés puisque $3 \geq -6$ et $3^2 \leq (-6)^2$.



Soit x et y deux réels non nuls tels que $x \geq y$. Pour comparer x^{-3} et y^{-3} , on note en premier lieu que $x^3 \geq y^3$ puisque la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante. On distingue ensuite plusieurs cas.

- Si x et y sont strictement positifs alors x^3 et y^3 ont la même propriété. On sait alors que $x^{-3} \leq y^{-3}$ puisque la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Si x et y sont strictement négatifs alors x^3 et y^3 ont la même propriété. On sait alors que $x^{-3} \leq y^{-3}$ puisque la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.
- Si x et y sont de signe contraire alors x est strictement positif et y est strictement négatif. Comme le cube et l'inverse d'un réel sont de même signe que le réel considéré, on en déduit que x^{-3} est positif et que y^{-3} est négatif. En particulier $x^{-3} \geq y^{-3}$.



Soit x un réel appartenant à $[1; 2]$. On veut encadrer le réel $A = \frac{x^2 + 1}{x}$. On propose deux solutions.

- Comme $1 \leq x \leq 2$ et comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $1 \leq x^2 \leq 4$ donc $2 \leq x^2 + 1 \leq 5$. Comme $1 \leq x \leq 2$ et comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$. En effectuant le produit des deux encadrements, qui ne mettent en jeu que des nombres positifs, on obtient $1 \leq A \leq 5$.
- On peut aussi remarquer que $A = x + \frac{1}{x}$. On montre comme dans la première étude que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$. Comme $1 \leq x \leq 2$, on obtient en ajoutant les estimations $\frac{3}{2} \leq A \leq 3$.

Le fait d'obtenir deux encadrements différents de A dans le dernier exemple n'est pas incohérent. Sur la figure ci-contre, on a représenté en rouge l'intervalle dans lequel on a localisé A à l'aide du premier calcul, et en bleu l'intervalle dans lequel on a localisé A à l'aide du second calcul. Tout ce que l'on peut en déduire est que la première estimation est **moins précise** que la seconde. Une des difficultés majeures de la manipulation des inégalités est que l'on peut perdre des renseignements sur les grandeurs manipulées au cours du calcul, la quantité de renseignements perdus dépendant de la manière dont on mène le calcul considéré.



1.2 Entraînement

Exercice 36

Dans chaque question de cet exercice, on considère deux réels dont on précise le classement, et l'objectif est de classer des expressions construites à partir de ces réels comme dans les deux premiers exemples du cours.

1. Soit x et y deux réels tels que $x \leq y$. Classer e^{x+1} et e^{y+1} puis xe^x et xe^y .
2. Soit x et y deux réels strictement positifs tels que $x \leq y$. Classer $(\ln(x))^3$ et $(\ln(y))^3$, puis $x\sqrt{x+1}$ et $y\sqrt{y+1}$.
3. Soit x et y deux réels tels que $x < 0 < y$. Classer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, puis $xe^{3x} + 1$ et $xe^{3y} + 1$, puis $xe^{3x} + 1$ et $ye^{3y} + 1$.

Exercice 37

Soit x un réel appartenant à $[-1; 2]$. On pose $A = 2x^2 - x + 2$. L'objectif de cet exercice est d'encadrer le plus précisément possible le réel A . Dans la première question, on utilise l'expression initiale de A . Dans la seconde question, on utilise la forme canonique de l'expression de A . On constatera que cette deuxième approche est plus performante.

1. Préciser successivement un encadrement de $2x^2$, de $-x$, puis de A .
2. Mettre sous forme canonique l'expression A et déterminer un nouvel encadrement de ce réel.

Exercice 38



Soit x un réel appartenant à $[1; 3]$. On pose $A = \frac{4x+1}{2x+1}$. L'objectif de cet exercice est d'encadrer le plus précisément possible le réel A . Dans la première question, on utilise l'expression initiale de A . Dans la seconde question, on transforme l'expression de A . Seule cette transformation relève d'un «calcul de tête», justifiant la présence du pictogramme «pingouin qui réfléchit». On constatera que cette deuxième approche est plus performante.

1. Préciser successivement un encadrement de $4x+1$, de $2x+1$, puis de A .
2. Écrire A sous la forme $A = ? + \frac{?}{2x+1}$, où chaque $?$ désigne un rationnel explicitement connu.
Déterminer alors un nouvel encadrement du réel A .

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 104 à 109. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 164 à 167.

2 Révisions

Exercice 39

Soit n un entier et a, b deux complexes non nuls. Trouver une écriture plus simple de $\frac{(-1)^{3n+1} \times 15^n}{2^{2n} \times (-3)^n}$ et de $\frac{(a^2b)^n}{a^{n+1}b}$.

Exercice 40

Soit x un réel de $\mathbb{R}^+ \setminus \{4\}$. Simplifier l'expression $A = \frac{\sqrt{x^4 + 3x^2} - 2\sqrt{4x^2 + 12}}{\sqrt{x} - 2}$.

Huitième leçon

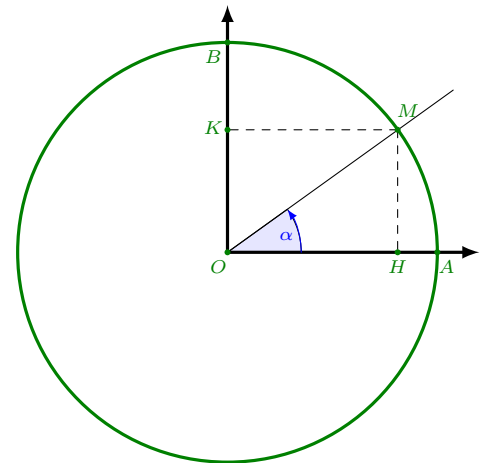
1 Propriétés algébriques des fonctions trigonométriques

1.1 Cours

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB) . On oriente les droites (OA) et (OB) respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Si α désigne une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, on sait que

$$\cos(\alpha) = \overline{OH} \quad \sin(\alpha) = \overline{OK}$$

Cette présentation géométrique des fonctions sinus et cosinus est suffisante pour énoncer et retrouver les propriétés algébriques de ces fonctions. Ainsi l'application du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle (OHM) conduit directement à la relation fondamentale bien connue liant sinus et cosinus.



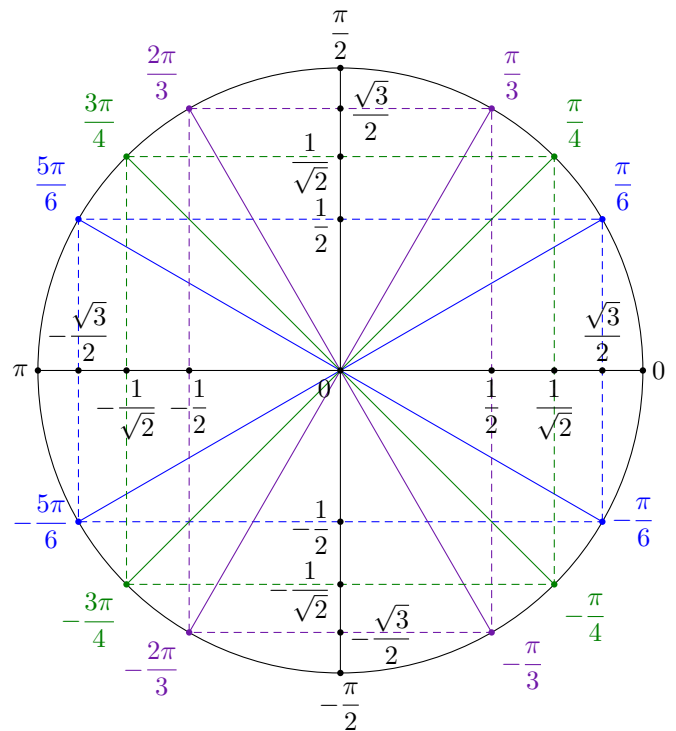
À mémoriser

(T1) Pour tout réel α , $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$

Certaines valeurs particulières prises par les fonctions sinus et cosinus sont à connaître. Elles sont rassemblées dans le tableau ci-dessous. Mémoriser ces valeurs à l'aide du cercle trigonométrique est une bonne idée, d'autant que quelques propriétés de symétrie élémentaires permettent de trouver d'autres valeurs remarquables sans plus d'effort. Toutes ces remarques sont illustrées par le cercle trigonométrique tracé ci-contre, qu'il faut savoir retracer rapidement.

À mémoriser

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



À mémoriser

Pour tout réel α ,

$$(T2) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$(T3) \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$(T4) \quad \cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$(T5) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$(T6) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$(T7) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$(T8) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$(T9) \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$(T10) \quad \sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

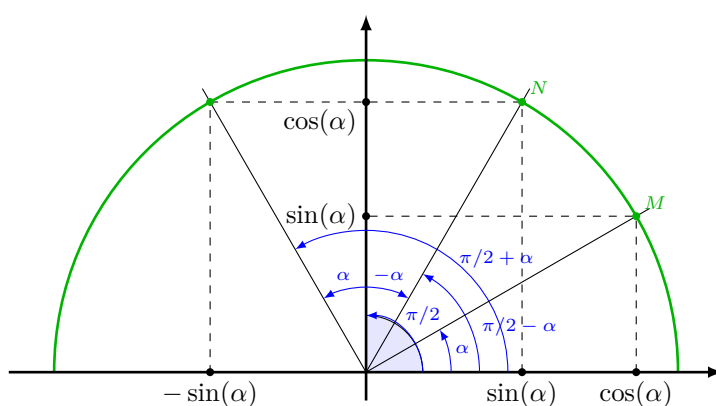
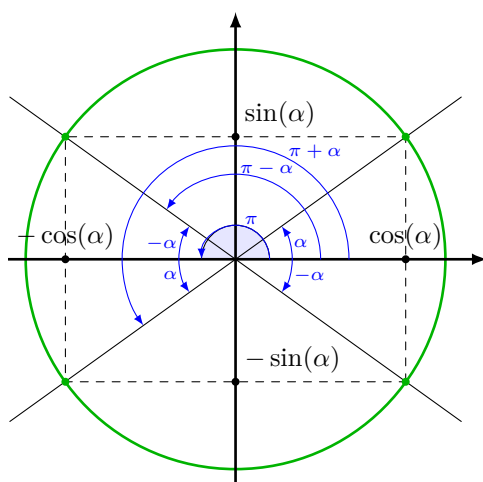
$$(T11) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$(T12) \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$(T13) \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$



- Encore une fois, toutes les formules précédentes se retrouvent directement par lecture sur le cercle trigonométrique, qu'il faut donc mémoriser et ne pas hésiter à retracer rapidement avant d'aborder un exercice mettant en jeu de la trigonométrie. Le cercle à gauche ci-dessous illustre les formules (T3), (T4), (T6), (T7), (T9), (T10), (T12) et (T13). Le cercle à droite ci-dessous illustre les quatre autres formules de la proposition. Sur cette figure, les points M et N sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice du repère, ce qui explique l'«échange» des coordonnées de ces points.



- Le calcul de sinus et de cosinus de réels appartenant à $[0; 2\pi]$ ou à $[-\pi; \pi]$ se fait par lecture directe sur le cercle trigonométrique. En effet sur ces domaines angulaires, on fait moins d'un tour du cercle. Pour des valeurs en dehors de cet intervalle, on utilise les propriétés (T4) et (T10) pour se ramener au cas connu. En effet ces deux propriétés assurent que pour tout entier k et tout réel α , $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$.
- En utilisant les relations (T3) et (T9), on note que pour tout entier k et tout réel α , $\cos(\alpha + k\pi) = (-1)^k \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + k\pi) = (-1)^k \sin(\alpha)$.



On veut calculer $A = \cos\left(\frac{131\pi}{3}\right)$.

On note que $131 = 3 \times 42 + 5$ donc $\frac{131\pi}{3} = 42\pi + \frac{5\pi}{3}$.

La lecture du cercle trigonométrique assure alors que $A = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

À mémoriser

Pour tous réels α et β ,

$$(T14) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$(T15) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$(T16) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$(T17) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$



Les propriétés (T7) et (T13) assurent que la deuxième colonne de la proposition précédente est la même que la première. Il suffit de remplacer β par $-\beta$. Dans le même ordre d'idée, la proposition qui suit est un cas particulier de celle qui précède. Il suffit de considérer deux réels α et β égaux. Pourtant, toutes ces formules sont à mémoriser car il faut les reconnaître en toute circonstance et sous toutes leurs formes. Un étudiant qui n'aurait mémorisé que (T14) ne pensera jamais à remplacer $2(\cos(\alpha))^2 - 1$ par $\cos(2\alpha)$ car il ne reconnaîtra pas la formule (T19) qui en est un cas particulier.

À mémoriser

Pour tout réel α ,

$$(T18) \quad \cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2$$

$$(T19) \quad = 2(\cos(\alpha))^2 - 1$$

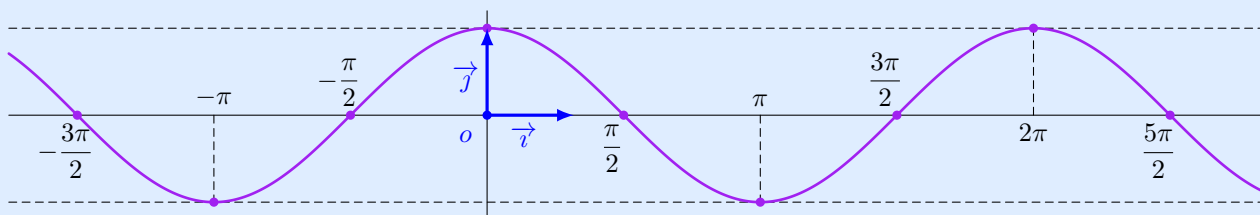
$$(T20) \quad = 1 - 2(\sin(\alpha))^2$$

$$(T21) \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

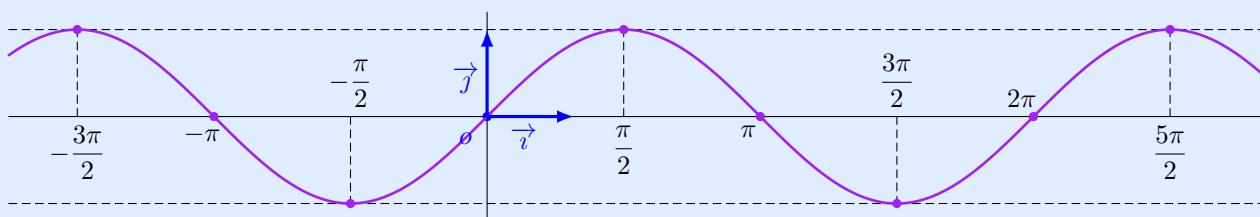
Comme pour toute fonction usuelle, les graphes des fonctions sinus et cosinus doivent être connus. Il faut être capable de les tracer rapidement en plaçant quelques points remarquables. En particulier, il faut connaître les points d'annulation de ces fonctions, que l'on rappelle dans un dernier cadre. Encore une fois, la lecture du cercle trigonométrique permet de les retrouver.

À mémoriser

Graphes de la fonction cosinus



Graphes de la fonction sinus



À mémoriser

- L'ensemble des points d'annulation de la fonction sinus est $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- L'ensemble des points d'annulation de la fonction cosinus est $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

1.2 Entraînement

Exercice 41

Donner la valeur exacte de $A = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $B = \cos\left(\frac{47\pi}{3}\right)$, $C = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{2}\right)$ et $D = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{29\pi}{6}\right)$.

Exercice 42

Soit α un réel. En utilisant les formules (T2) à (T13), simplifier les expressions suivantes. Chaque terme des sommes qui suivent est égal à un multiple entier de $\sin(\alpha)$ ou $\cos(\alpha)$.

$$A = \sin(\alpha + 13\pi) \quad B = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(-\alpha) \quad C = \sin(7\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 43

1. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-\pi; 0]$ tels que $\cos(t) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer tous les réels t appartenant à $[18\pi; 20\pi]$ tels que $\cos(t) = -\frac{1}{2}$.
3. Déterminer tous les réels t appartenant à $[11\pi; 12\pi]$ tels que $\sin(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-6\pi; -5\pi]$ tels que $\sin(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 44

On considère la fonction

$$f :]-\pi/2; \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-\pi/4; \pi/4[$, $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 - (f(x))^2}$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in [0; \pi/2]^2$, $x - y$ appartient à $]-\pi/2; \pi/2[$ et $f(x - y) = \frac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)f(y)}$.

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 110 à 115. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 168 à 172.

2 Révision

Exercice 45

Soit x un complexe. Mettez sous forme canonique les expressions $A = 4x + 16x^2 - 3$ et $B = 2x - 1 - 2x^2$

Exercice 46

1. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|1 - 3x| \geq 2$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|x^2 - 1| \leq 2$.

Exercice 47



Remplacer chaque ? des identités suivantes par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout complexe x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1/4\}$, $\frac{2x+3}{4x-1} = ? + \frac{?}{x+?}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/2, 1\}$, $\frac{1}{(x-1)(2x+1)} = \frac{?}{x-1} + \frac{?}{2x+1}$.

Neuvième leçon

1 Les nombres complexes

1.1 Cours

En terminale, vous avez construit un ensemble $\mathbb{C}$ de nombres, contenant $\mathbb{R}$ et un élément noté i dont le carré est -1 . Pour tout élément z de cet ensemble, il existe un unique couple (a, b) de réels tel que $z = a + ib$. Cette écriture est la **forme algébrique** du complexe z . Le réel a est appelé partie réelle de z et noté $\operatorname{Re}(z)$. Le réel b est appelé partie imaginaire de z et noté $\operatorname{Im}(z)$. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'un produit qui prolongent ceux de $\mathbb{R}$ et possèdent les mêmes propriétés calculatoires. Tout ce qui a été revu les trois premiers jours de vos révisions s'applique donc sans modification.

À mémoriser

Soit a, b, c et d quatre réels.

$$(C1) \quad (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(C2) \quad (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

$$(C3) \quad \text{Si } (a, b) \neq (0, 0), \quad \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{(-b)}{a^2 + b^2}$$

Technique

Le complexe i présente des propriétés à connaître vis à vis des puissances.

- Si n est un entier relatif alors $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = (-1)^n i$.
- Si m et n sont deux entiers relatifs tels que $m - n$ soit un multiple de 4 alors $i^m = i^n$.



La deuxième propriété assure que dans un calcul, seules les puissances d'ordre 0, 1, 2 et 3 de i sont à calculer. Elles valent respectivement 1, i , -1 et $-i$. Par exemple, en utilisant les propriétés (P1) et (P2), on note que $i^{30} = i^{4 \times 7 + 2} = (i^4)^7 \times i^2 = i^2 = -1$.

Technique

L'unicité de la forme algébrique d'un complexe permet d'**identifier** [?] deux telles écritures. Si a, b, a' et b' sont quatre réels, alors $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. En particulier un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Soit z un nombre complexe. Il existe deux réels a et b tels que $z = a + ib$. On appelle alors conjugué de z et on note $\bar{z}$ le complexe $a - ib$.

À mémoriser

Soit z et z' deux complexes.

$$(C4) \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$(C5) \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$(C6) \quad \overline{-z} = -\bar{z}$$

$$(C7) \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

$$(C8) \quad \text{Si } z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

Technique

Soit z un complexe dont on note a la partie réelle et b la partie imaginaire. Comme $z\bar{z} = a^2 + b^2$, $z\bar{z}$ est en particulier réel. Cette remarque permet de ne pas mémoriser la formule (C3) utilisée pour mettre un quotient de complexes sous forme algébrique. Pour ce faire, il suffit en fait de multiplier numérateur et dénominateur du quotient considéré par le conjugué du dénominateur.



Pour mettre sous forme algébrique le complexe $z = \frac{2+3i}{1+2i}$, il suffit d'écrire

$$z = \frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i+3i-6i^2}{1+2^2} = \frac{8-i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$$

Technique

Pour tout complexe z ,

$$(C9) \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$(C10) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

En particulier, un complexe est un réel si et seulement s'il est égal à son conjugué, et imaginaire pur si et seulement s'il est égal à l'opposé de son conjugué.



La recherche des solutions réelles d'une équation polynomiale du second degré à coefficients réels est connue au moins depuis le IX^e siècle avec les travaux de Al-Khwarizmi. Pour mener cette recherche, on n'utilise que des réels. Contrairement à ce que l'on peut croire, les complexes n'ont pas été introduits a priori pour construire des solutions «imaginaires» à de telles équations, mais pour chercher les solutions réelles des équations polynomiales du troisième degré à coefficients réels. Ces équations ont été étudiées en particulier par Cardan, Tartaglia et Bombelli vers le milieu du XVI^e siècle. Soit par exemple p et q deux réels. On considère l'équation

$$(E) \quad x^3 + px + q = 0$$

d'inconnue réelle x . L'idée des trois mathématiciens fut de chercher des solutions sous la forme $u+v$ avec $uv = -p/3$. Un peu de calcul algébrique permet alors de montrer que u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation du second degré

$$(F) \quad y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

d'inconnue y . Par exemple, dans le cas où $p = -2$ et $q = 4$, les solutions de (F) sont $-2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}$ et $-2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}$.

On peut trouver deux réels dont les cubes sont ces solutions, à savoir $-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. La somme de ces deux réels est -2 , qui est bien une solution de (E). On peut de plus vérifier que (E) n'a qu'une solution réelle et la méthode semble satisfaisante. Mais lorsque $p = -7$ et $q = -6$, l'équation (F) n'a pas de solution réelle alors que les solutions de (E) sont toutes réelles puisque ce sont les nombres -1 , 3 et -2 . Bombelli décida donc de résoudre (F) en utilisant des racines carrées de nombres négatifs et supposa que ces nombres «impossibles» présentaient les mêmes caractéristiques calculatoires que les réels. En particulier si a est une racine carrée de -3 alors $a^3 = a^2 \times a = -3a$. Dans notre cas, les solutions de (F) sont écrites par Bombelli sous la forme

$$\begin{aligned} & 3 + \frac{10\sqrt{-3}}{9} \text{ qui est le cube de trois nombres impossibles } \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{6}, -\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{-3}}{6} \text{ et } -1 + \frac{2\sqrt{-3}}{3}. \\ \text{et } & 3 - \frac{10\sqrt{-3}}{9} \text{ qui est le cube de trois nombres impossibles } \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{6}, -\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{-3}}{6} \text{ et } -1 - \frac{2\sqrt{-3}}{3}. \end{aligned}$$

En faisant la somme d'un des nombres impossibles u associé à la première solution de (F) avec le nombre impossible v associé à la deuxième solution de (F) tel que $uv = 7/3$, on trouve bien les solutions de (E). L'algorithme de résolution de l'équation de degré 3 semble donc encore fonctionnel malgré le passage par les nombres «impossibles». Il faudra cependant attendre la fin du XVIII^e siècle pour que ces nombres dits «impossibles» soient acceptés et que leur sens soit précisé, afin que disparaissent des paradoxes comme

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Vous verrez l'année prochaine comment ce paradoxe est lié à l'idée fausse que l'on peut définir une fonction racine carrée dans $\mathbb{C}$.

1.2 Entraînement

Exercice 48

Écrire sous forme algébrique les nombres $A = (2 - i)(3 + 2i)$, $B = \frac{2 + 3i}{4 - i}$, $C = \frac{(1 - i)^4}{2 + i}$ et $D = \frac{(2 + i)^3}{(1 + 2i)^3}$.

Exercice 49

On pose $z = 2 + 2i$. Écrire sous forme algébrique les nombres z^2 , z^3 , z^4 , z^{50} .

Exercice 50

Soit m et n deux entiers. Trouver une écriture plus simple de $A = \frac{(2i)^{2n+1} \times (-1)^{n+2m}}{8^{n+m}}$ et de $B = \frac{(2i)^{3n+1} \times (4)^{-n}}{(-i)^n}$.

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 116 à 119.

2 Révisions

Exercice 51

Trouver une écriture plus simple de $\frac{10^5 + 10^6 \times 10^{-3}}{(10^2)^2}$ et de $\frac{3^4}{2^5} + \left(\frac{6^2}{4^2}\right)^2$,

Exercice 52

Soit x et y deux complexes. Factoriser $A = -16xy^2 + 4x$ et $B = (2x - y)(16x^2 - 25y^2) + (4x^2 - y^2)(4x - 5y)$.

Exercice 53

Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $(1 - x)^2 + x^2 < 1$.

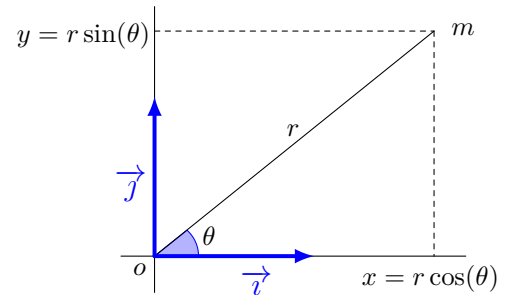
Dixième leçon

1 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Cours

On travaille dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Se donner un point m de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) est équivalent à se donner le complexe $z = x + iy$ appelé affixe de m . La distance r entre m et o est appelée module de z et notée $|z|$. Lorsque m est distinct de o , c'est à dire lorsque z n'est pas nul, on peut repérer m par la donnée de r et celle d'une mesure θ de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{om})$, appelé un argument de z . Les coordonnées du point m sont alors $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. On peut donc écrire $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Le complexe z/r se note $e^{i\theta}$ donc

$$z = |z|e^{i\theta}$$



Cette écriture s'appelle **écriture trigonométrique** du complexe z .



- Le module d'un réel est la valeur absolue de ce réel. Les notations sont donc cohérentes.
- Si θ est un argument d'un complexe non nul z , les autres arguments de z sont les réels qui diffèrent de θ d'un multiple entier de 2π . En particulier, z admet une infinité d'arguments. Voilà pourquoi on parle d'un argument de z et pas de l'argument de z . On réserve en effet les articles définis aux objets définis de manière unique.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$. Tout complexe z non nul admet donc un argument θ qui appartient à $]-\pi; \pi]$. Cet argument est unique et appelé argument principal de z . Par exemple, si on cherche l'argument principal de $z = 3e^{47\pi i/3}$, il suffit de noter que

$$\begin{aligned} 47 &= 3 \times 16 - 1 \\ \text{donc } \frac{47\pi}{3} &= 16\pi - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

donc l'argument principal de z est $-\frac{\pi}{3}$ et on peut écrire $z = 3e^{-\pi i/3}$.



Soit r et θ deux réels. On pose $z = re^{i\theta}$. Cette écriture de z est appelée **écriture exponentielle** de z . Ce n'est pas forcément l'écriture trigonométrique de z , même si elle peut rendre des services analogues. Il ne faut pas croire que r est le module de z et que θ est un argument de z . Cela dépend du signe de r . Plus précisément,

	si $r = 0$	si $r > 0$	si $r < 0$
module de z	0	r	$-r$
argument de z	indéfini	θ	$\theta + \pi$
écriture trigonométrique de z	indéfinie	$re^{i\theta}$	$(-r)e^{i(\theta+\pi)}$

Par exemple l'écriture trigonométrique de $-2e^{i\pi/3}$ est $2e^{4i\pi/3}$.



Nous utilisons souvent nos connaissances en trigonométrie pour manipuler les complexes. La démarche inverse est tout aussi féconde. On peut retrouver des propriétés des fonctions trigonométriques via du calcul complexe, voire utiliser les complexes pour éviter la trigonométrie. C'est ainsi qu'un physicien qui manipule une grandeur u dépendant du temps de manière sinusoïdale introduit des grandeurs complexes. Par exemple, dès l'année prochaine, à une tension périodique de période ω et de valeur moyenne U dont l'expression en fonction du temps t est $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$, vous associez la grandeur complexe $Ue^{i\varphi}$ qui ne dépend pas du temps! Cela vous permettra de généraliser la notion de résistance et la loi d'Ohm à beaucoup de dipôles lors d'un fonctionnement en régime sinusoïdal.

À mémoriser

Soit z et z' deux complexes.

$$(M1) \quad |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$(M2) \quad |-z| = |z|$$

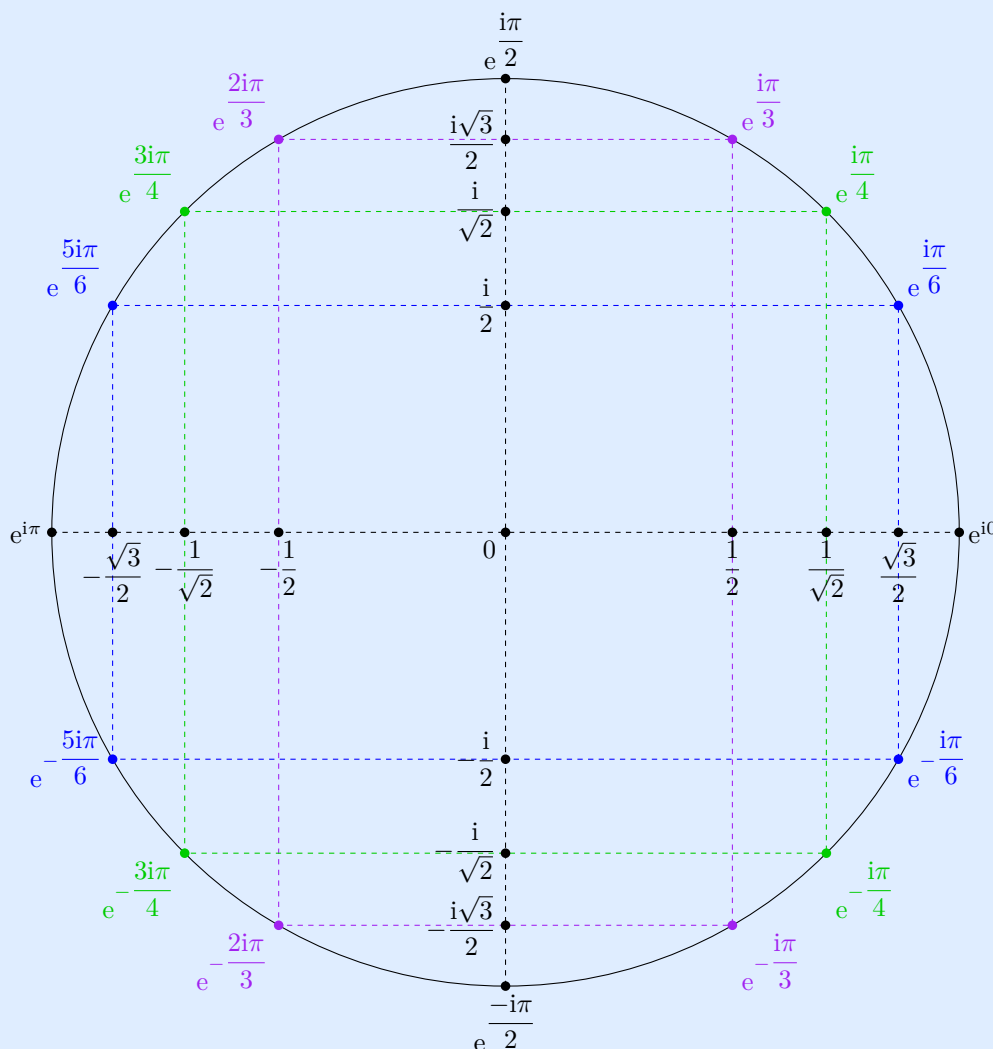
$$(M3) \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$(M4) \quad |zz'| = |z||z'|$$

$$(M5) \quad \text{Si } z' \neq 0 \text{ alors } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Technique

Pour déterminer l'écriture trigonométrique d'un complexe non nul z donné sous forme algébrique, on calcule le module de z à l'aide de (M1). Il faut ensuite trouver un réel θ tel que $\frac{z}{|z|}$ soit égal à $e^{i\theta}$. Pour ce faire, il faut impérativement pouvoir retrouver les valeurs remarquables du cosinus et du sinus et les angles qui leur correspondent, donc mémoriser le cercle trigonométrique ci-dessous, déjà appris dans le chapitre sur les fonctions trigonométriques page 26. Seul le premier quart du cercle est utile à apprendre si on repère les trois rectangles mis en évidence sur cette figure.



Déterminons l'écriture trigonométrique de $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. On note en premier lieu que $|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ puis que

$$z = |z| \times \frac{z}{|z|} = 4 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = 4e^{i\pi/3}$$

Les étudiants maîtrisant bien le cercle trigonométrique doivent pouvoir «deviner» qu'il suffit de mettre 4 en facteur pour trouver une forme trigonométrique connue. Ils s'épargnent ainsi le calcul du module de z .

À mémoriser

Soit θ et θ' deux complexes, et n un entier relatif.

$$(EC1) \quad e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(EC2) \quad \frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$$

$$(EC3) \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$(EC4) \quad (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$$

Technique

Les formules (EC1) à (EC4) permettent de déterminer les écritures trigonométriques de produits, quotients et puissances de complexes connus sous forme trigonométrique. En effet, soit r et r' deux réels strictement positifs, θ et θ' deux réels, et n un entier relatif. On pose $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$.

- $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- $z^n = r^n e^{ni\theta}$

Ces mêmes formules sont valables lorsqu'on utilise une écriture exponentielle pour z ou z' , c'est à dire lorsque r et r' sont des réels quelconques, à condition d'imposer r non nul dans la deuxième formule et dans la dernière formule dans le cas où on manipule un entier n négatif.



Ces formules montrent que l'écriture exponentielle est adaptée à certaines opérations comme les puissances, mais pas à d'autres comme les sommes. Une question récurrente dans les exercices est de choisir l'écriture des complexes de telle sorte à pouvoir les manipuler facilement et en obtenant si possible des résultats sous la même forme que les données. Dans cette optique, on note que

- La forme algébrique est adaptée aux sommes et différences, permet d'effectuer des produits et des quotients, mais ne permet pas de manipuler des puissances d'ordre trop élevé.
- La forme exponentielle est adaptée aux produits, quotients et puissances, mais ne permet pas de manipuler des sommes ou des différences sauf dans quelques cas particuliers présentés dans l'exercice de recherche 177.

Cherchons par exemple à écrire sous forme algébrique la puissance d'ordre 100 de $z = \sqrt{3} - i$. Il est illusoire de penser que l'on peut développer l'écriture algébrique! En revanche

$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2e^{-i\pi/6}$$

$$\text{donc } z^{100} = 2^{100} e^{-100i\pi/6} = 2^{100} e^{-50i\pi/3}$$

$$\text{or } 50 = 3 \times 16 + 2$$

$$\text{donc } z^{100} = 2^{100} e^{-2i\pi/3}$$

$$\text{donc } z^{100} = -2^{99} (1 + \sqrt{3}i)$$

1.2 Entraînement

Exercice 54

Les questions qui suivent sont indépendantes. Dans chacune, z désigne un complexe de module 1.

1. On suppose que $z = e^{5i\pi/6}$. Quelle est la forme algébrique de z ?
2. On suppose qu'un argument de z est $\frac{3\pi}{4}$. Quelle est la forme algébrique de z ?
3. On suppose que la partie réelle de z est $\frac{1}{2}$ et que sa partie imaginaire est négative. Préciser un argument de z et la forme algébrique de ce complexe.

Exercice 55

Tracer un cercle trigonométrique, y placer les images des complexes suivants puis donner leur écriture algébrique.

$$z_1 = e^{5i\pi/4}, \quad z_2 = e^{-i\pi/6}, \quad z_4 = e^{2i\pi}, \quad z_5 = e^{25i\pi/3}$$

Exercice 56

Tracer un cercle trigonométrique, y placer les images des complexes suivants puis en donner rapidement un argument.

$$z_1 = i, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad z_4 = -\frac{1 - i}{\sqrt{2}}$$

Exercice 57

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes qui suivent puis préciser leur argument principal.

$$z_1 = 3i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = e^{47i\pi/2} e^{11i\pi/3}, \quad z_4 = \frac{e^{8i\pi/15} \times \overline{e^{3i\pi/10}}}{e^{11i\pi/3}}, \quad z_5 = (e^{5i\pi/4})^3 (e^{9i\pi/8})^{-4}$$

Exercice 58

Donner la forme algébrique chacun des complexes suivants.

$$\begin{aligned} z_1 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2}i)^{10}, & z_2 &= ((3 - i)(1 + 2i))^{27}, & z_3 &= \left(\frac{1 - i}{e^{i\pi/12}}\right)^{15} \\ z_4 &= \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^8, & z_5 &= ((2 + 2i)(\sqrt{3} - i))^{-10}, & z_6 &= \left(\frac{2 + i\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + i}\right)^{11} \end{aligned}$$

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 120 à 126. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 173 à 179.

2 Révisions**Exercice 59**

Soit x et y deux complexes. Écrire chacun des nombres suivant sous la forme d'une unique fraction dont les numérateurs et dénominateurs sont des expressions polynomiales factorisées. On suppose que x et y sont choisis de telle sorte que les dénominateurs des diverses fractions ne soient pas nuls.

$$A = \frac{x + \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{x}}, \quad B = \frac{(x - 1)^2 + \frac{1 - x}{1 + x}}{x^2 - 4x + 3}$$

Exercice 60

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x}{1 + x^2} \geq -1$ et $\frac{2x}{1 + x^2} \leq 1$.

Onzième leçon

1 Manipulation de sommes

1.1 Cours

À mémoriser

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$ et $a_p, \dots, a_q$ des complexes. La somme $a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$ est notée $\sum_{k=p}^q a_k$.



Il faut prendre garde à bien placer les parenthèses dans les expressions qui se trouvent «sous le signe somme». Plus clairement,

- $\sum_{k=1}^4 (k^2 + 1) = (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) = 34$
- $\sum_{k=1}^4 k^2 + 1 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 1 = 31$



- Dans l'écriture précédente, la lettre k est «muette». La somme manipulée peut tout aussi bien s'écrire $\sum_{i=p}^q a_i$.
- Il est important d'apprendre à manipuler le symbole $\sum$, indispensable dans beaucoup de situations. Cependant, utiliser l'écriture «développée» des sommes, c'est à dire écrire les sommes en écrivant un ou deux des premiers termes et un ou deux des derniers termes en laissant des $\dots$ n'est pas interdit. Cela permet parfois de comprendre comment mener un calcul. Dans certaines situations complexes, on peut même écrire des cas particuliers pour des valeurs numériquement connues de p et q . On peut alors écrire tous les termes de la somme manipulée et réellement comprendre le processus de calcul. Considérons par exemple un entier naturel n et $a_0, \dots, a_{n+1}$ des complexes. Tout le monde ne verra pas forcément immédiatement que

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

Ce résultat est bien plus visible en écrivant

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

En effet, on réalise alors plus facilement que les termes se simplifient deux à deux. Si même cette écriture est insuffisante, on peut se limiter à écrire le cas particulier où $n = 3$, qui est évident à simplifier.

$$\sum_{k=0}^3 (a_k - a_{k+1}) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) = a_0 - a_4$$

À mémoriser

Soit p, q, r trois entiers naturels tels que $p < q < r$, λ un complexe et $a_p, a_{p+1}, \dots, a_r, b_p, b_{p+1}, \dots, b_r$ des complexes.

$$(S1) \quad \sum_{k=p}^r (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^r a_k + \sum_{k=p}^r b_k$$

$$(S2) \quad \sum_{k=p}^r (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^r a_k$$

$$(S3) \quad \sum_{k=p}^r a_k = \sum_{k=p}^q a_k + \sum_{k=q+1}^r a_k$$

Seule l'écriture des objets manipulés dans la proposition précédente font que les formules semblent complexes. Ce sont en effet des résultats élémentaires basés sur la commutation et le regroupement de termes dans une somme, et sur la distributivité de la multiplication sur l'addition. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer des complexes $\lambda, a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ et de réécrire les formules.

- (S1) s'écrit $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (b_0 + b_1 + b_2 + b_3)$.
- (S2) s'écrit $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 = \lambda(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$.
- (S3) s'écrit par exemple $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = (a_0 + a_1) + (a_2 + a_3)$, en choisissant $r = 1$.

À mémoriser

Soit n un entier naturel et a un complexe.

$$(S4) \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(S5) \quad \sum_{k=0}^n a^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } a = 1 \\ \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

Technique

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq q$ et $a_p, \dots, a_q$ des complexes. Pour exprimer la somme

$$S = \sum_{k=p}^q a_k$$

sans utiliser de symbole de sommation, on essaie de se ramener aux deux sommes connues de la proposition précédente. Notez que les sommes connues sont indicées par un ensemble formé d'entiers consécutifs commençant à 0, et pas à p . On peut utiliser deux idées pour corriger ce problème.

- On peut noter que $S = \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=0}^q a_k - \sum_{k=0}^{p-1} a_k$.
- On peut noter que $S = \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{p+k}$.



La deuxième idée de la remarque technique précédente est un tour de passe-passe... Écrivez les sommes apparaissant de manière développée et vous écrirez deux fois la même chose. Mettons cette idée en œuvre. Soit n un entier naturel strictement plus grand que 3. Exprimons sans symbole de sommation le réel

$$S = \sum_{k=4}^n 3^k$$

Dans ce calcul, on écrit les sommes «développées» à chaque étape afin que le calcul soit facile à suivre. Mais dans une rédaction finale, ces explications n'ont pas lieu d'être.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=4}^n 3^k &= 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{n-1} + 3^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-4} 3^{k+4} &= 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{n-1} + 3^n \\ &= 3^4 \sum_{k=0}^{n-4} 3^k &= 3^4 (3^0 + 3^1 + \dots + 3^{n-5} + 3^{n-4}) \\ &= \frac{3^4 (3^{n-3} - 1)}{2} \end{aligned}$$

en utilisant la formule (S5) qui est valide puisque $3 \neq 1$. On peut alors remplacer 3^4 par 81, ce qui achève le calcul.

1.2 Entraînement

Exercice 61

Soit n un entier naturel. Donner une expression sans symbole de sommation de

$$S_1 = \sum_{k=0}^n (2k+1), \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k-1, \quad S_3 = \sum_{k=10}^{2n} k \quad \text{et} \quad S_4 = \sum_{k=n+1}^{3n+1} (3k-1)$$

Les résultats devront être mis sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est un entier numériquement connu et le numérateur est une **expression polynomiale** ? en n entièrement factorisée.

Exercice 62

Soit n un entier naturel et x, y deux complexes, le second n'étant pas nul. Donner une expression sans symbole de sommation de

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{y^k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k, \quad S_3 = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}, \quad S_4 = \sum_{k=1}^{n+1} e^{(k+1)x} \quad \text{et} \quad S_5 = \sum_{k=n}^{3n} 4x^k$$

On supprimera les fractions «étagées» dans les expressions finales.

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 127 à 129. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 180 à 183.

2 Révisions

Exercice 63

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible les nombres $A = \left(-\frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{4}{7} + \frac{9}{5}\right) - \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{5}\right)$ et $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{5}{24}$.

Exercice 64



Dans chacune des questions suivantes, x est un nombre. On ne demande pas d'effectuer des développements complets des expressions considérées. L'objectif est de ne déterminer que le terme demandé sans écrire le développement complet.

1. Déterminer le terme en x^2 de $(1-2x)(3+x)(3x+2)$.
2. Déterminer le terme en x de $(x-2)(x^2+3x-1)$.

Exercice 65

Soit x et y deux complexes. Factoriser les expressions $A = 3(2xy+3) + x^2y^2$ et $B = x^2 - (x-y)(x+1) - y^2$.

Douzième leçon

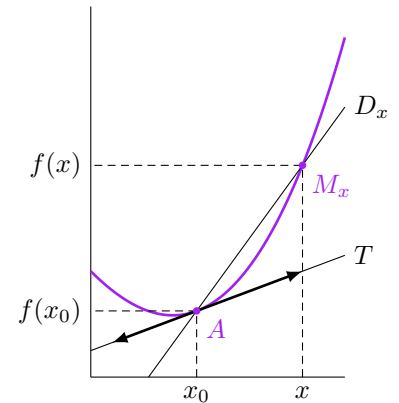
1 Notion de dérivée

1.1 Cours

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I . À chaque élément x de I distinct de x_0 , on associe la droite D_x passant par les points A et M_x de coordonnées respectives $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$, dont la pente est

$$d_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si la pente d_x admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 , on dit que f est dérivable en x_0 et on appelle $f'(x_0)$ la limite introduite. Le cas échéant, géométriquement, la droite D_x «tend» intuitivement vers une droite limite, appelée T sur le schéma ci-contre, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 .



À mémoriser

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I . Si f est dérivable en x_0 alors une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ n'est pas forcément dérivable en tous les points où elle est définie. On doit donc mémoriser le domaine de définition et le domaine de dérivabilité, c'est à dire l'ensemble des points où la notion de dérivée a un sens, de chaque fonction usuelle. De plus, en chaque réel x en lequel une fonction f est dérivable, on doit apprendre l'expression de $f'(x)$. Tous les résultats utiles sont rassemblés dans la proposition qui suit.

À mémoriser

Dans le tableau qui suit, n est un entier naturel non nul et c désigne un réel quelconque.

Fonction	Domaine de dérivabilité	Expression de la dérivée
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto c$	$\mathbb{R}$	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto x^n$	$\mathbb{R}$	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$
$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto x^{-n}$	$\mathbb{R}^*$	pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -nx^{-n-1}$
$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$
$f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{1}{x}$
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x)$
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$



- Seule la fonction racine carrée a un domaine de définition différent de son domaine de dérivabilité.
- Soit p un entier relatif. En considérant les trois premières lignes du tableau, on note que pour tout réel x non nul, la fonction $f : x \mapsto x^p$ est dérivable en x et que $f'(x) = p x^{p-1}$. On a dû distinguer trois cas dans le tableau à mémoriser à cause de l'appartenance ou pas de 0 dans le domaine de définition de la fonction considérée. Ceci étant, lors de la phase de calcul, on a intérêt à écrire toutes les puissances sous la même forme. Il est plus simple de dériver $x \mapsto x^{-7}$ que de dériver $x \mapsto \frac{1}{x^7}$ en appliquant la formule (D4) qui suit sur les quotients.
- Le cas particulier où $n = 1$ de chacune des formules de la deuxième et la troisième ligne du tableau sont à connaître plus particulièrement. On souligne donc les deux points suivants.
 - La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et sa fonction dérivée est $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto x \qquad \qquad \qquad x \longmapsto 1$$
 - La fonction $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et sa fonction dérivée est $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad \qquad \qquad x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$$

À mémoriser

Soit λ un réel et f, g deux fonctions définies sur une partie I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un point de I en lequel f et g sont dérivables.

- (D1) La fonction $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
 (D2) La fonction λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$,
 (D3) La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
 (D4) Si g ne s'annule pas, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.
 En particulier la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$.

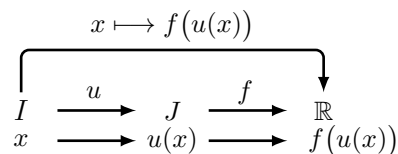
À mémoriser

Soit u une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans une partie J de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I tel que u soit dérivable en a et f soit dérivable en $u(a)$.

- (D5) La fonction $g : x \mapsto f(u(x))$ est dérivable en a et $g'(a) = u'(a)f'(u(a))$



- Le résultat précédent n'est pas facile à mémoriser ne serait-ce que parce que les ensembles de départ des deux fonctions sont différents. On peut cependant visualiser la construction esquissée dans ce résultat comme le « chaînage » de deux fonctions, schématisé ci-contre. On se souvient ainsi facilement que le domaine de départ de f est celui d'arrivée de u et que f est étudiée sur des images de u .



- Si le premier point permet de mémoriser les contraintes à imposer aux fonctions f et u , elle ne permet pas forcément de mémoriser la formule de dérivation. Vous avez cependant rencontré cette formule dans beaucoup de cas particuliers. Citons en trois.
 - Soit u une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un élément de I en lequel elle est dérivable. Soit n un entier naturel non nul. En appliquant le résultat général avec la fonction $f : x \mapsto x^n$, on note que $g : x \mapsto u(x)^n$ est dérivable en a et que $g'(a) = n u'(a) u^{n-1}(a)$.
 - Soit u une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et a un élément de I en lequel elle est dérivable. En appliquant le résultat général avec la fonction logarithme, on note que $g : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable en a et que $g'(a) = \frac{u'(a)}{u(a)}$.
 - Soit u une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et a un élément de I en lequel elle est dérivable. En appliquant le résultat général avec la fonction racine carrée, on note que $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en a et que $g'(a) = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$.



Les deux dernières propositions ont été vues en Terminale, en se limitant souvent à l'aspect technique, c'est à dire en ne mettant en valeur que les formules. Dans vos révisions, vous allez garder ce point de vue et vous focaliser sur les calculs. Ceci étant il faudra bien s'interroger sur l'existence des objets que l'on manipule et la manière de prouver ces existences. Par exemple

$$\begin{aligned}]-1; 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

est dérivable. En effet, la fonction $x \mapsto x^2$ l'est. C'est un modèle de base. Donc la fonction $x \mapsto -x^2$ l'est d'après (D2). Donc la fonction $x \mapsto 1 - x^2$ l'est d'après (D1), en notant que la fonction $x \mapsto 1$ l'est aussi. Or les images des éléments de $] -1; 1[$ par la fonction $x \mapsto 1 - x^2$ appartiennent à $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (c'est aussi un modèle de base). On déduit alors du point (D5) (troisième cas particulier traité) que la fonction f est dérivable. Finalement les deux propositions précédentes sont des théorèmes permettant de prouver l'existence d'une dérivée. Cet aspect, presque plus important que les formules de calcul, sera travaillé en sup. Pour l'instant, vous pouvez vous contenter de faire du calcul de dérivation «formel». Une fois que les calculs vous paraîtront élémentaires, vous pourrez vous concentrer sur l'aspect plus abstrait de la notion de dérivation sans être perturbés par la technique.



Les formules (D1) à (D5) permettent le calcul effectif de la dérivée de toute fonction construite à partir des fonctions usuelles. Cependant, les calculs sont plus ou moins complexes à effectuer suivant les opérations apparaissant dans la construction. Une somme est plus facile à dériver qu'un produit, lui-même plus facile à dériver qu'un quotient... Il est donc impératif de réfléchir à l'écriture de l'expression d'une fonction avant de la dériver. Considérons par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f :]-1; 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \end{aligned}$$

dont on veut calculer la dérivée. Proposons plusieurs méthodes, de plus en plus efficaces.

- On dérive la fonction f sans essayer de transformer son expression. On introduit la fonction

$$\begin{aligned} u :]-1; 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1-x}{1+x} \end{aligned}$$

et on note que pour tout $x \in]-1; 1[$, $f(x) = \ln(u(x))$. En utilisant successivement la formule (D5) et l'expression de la dérivée d'un quotient rappelée en (D4), on obtient que pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{(-1) \times (1+x) - 1 \times (1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)^2} \times \frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

- Dans le calcul qui précède, le calcul annexe de la dérivée de u est pénible car u est un quotient de fonctions. Mais on sait réécrire ce quotient sous la forme d'une somme d'un réel et d'un inverse de fonction, bien plus simple à gérer. En effet, en utilisant la technique présentée page 9, pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$u(x) = \frac{2 - (1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1$$

Cette remarque permet de supprimer une partie du calcul précédent. En effet pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)^2} \times \frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

- On peut encore simplifier le calcul en notant que les propriétés de la fonction logarithme permettent de faire disparaître le quotient dès le départ en le remplaçant par une différence. En effet pour tout $x \in]-1; 1[$, $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$. Cette remarque permet de ne plus utiliser la fonction u et de dériver f de tête. Ainsi pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

Libre à l'auteur du calcul de mettre f sous la forme d'une seule fraction. Mais je vous rappelle que faire un calcul sans objectif est toujours une mauvaise idée. Mieux vaut attendre de savoir à quoi va servir f' pour adapter l'écriture de cette fonction au problème qui sera posé.

1.2 Entraînement

Exercice 66

Donner l'expression explicite de la dérivée de chacune des fonctions qui suit.

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(3x - 4) - e^{-x}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x^2 - x + 1)e^{-2x}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \sin(x)$$

$$f_4 :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$f_5 : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

$$f_6 : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

$$f_7 : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x^7}$$

$$f_8 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3x^2 + 5}{x^2 + 1}$$

$$f_9 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{e^x}}$$

$$f_{10} :]-1/2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(\sqrt{2x + 1})$$

$$f_{11} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\ln(3x^3) + 1)^3$$

$$f_{12} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs de l'exercice d'entraînement 130. Les plus curieux pourront travailler les exercices de recherche 184 et 185.

2 Révisions

Exercice 67

1. Développer $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2)(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2)$.
2. Dédurre de la question précédente une écriture sans racine carrée au dénominateur du réel $A = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

Exercice 68

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$.

Treizième leçon

1 Notion de primitive

1.1 Cours

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction F définie sur I , à valeurs réelles, dérivable et telle que $F' = f$. Par exemple, la dérivée de $x \mapsto 2 \sin(x/2)$ est $x \mapsto \cos(x/2)$, donc une primitive de $x \mapsto \cos(x/2)$ est $x \mapsto 2 \sin(x/2)$.



On parle toujours d'**une** primitive d'une fonction f . En effet il en existe toujours plusieurs. Par exemple la fonction $x \mapsto \cos(x/2) + 3$ est aussi une primitive de $x \mapsto 2 \sin(x/2)$. Vous avez démontré en terminale que lorsqu'on connaît une primitive F d'une fonction f définie sur un intervalle I à valeurs réelles, l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + C$ lorsque C est un réel quelconque. Soulignons que ce résultat n'est valable que parce que les fonctions manipulées sont définies sur un intervalle.

L'idée de relire les formules de dérivation avec un autre point de vue comme dans l'exemple qui précède permet de déduire les formules de calcul des primitives des formules de calcul de dérivées. Par exemple la relecture du tableau page 40 permet d'écrire le tableau qui suit. De même, tous les résultats à connaître sur les calculs de primitives ne sont que des résultats connus sur la dérivation, relus avec un autre point de vue. Par exemple si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, admettant chacune une primitive notée respectivement F et G , la formule (D1) sur la dérivation assure que $F + G$ est dérivable et $(F + G)' = F' + G' = f + g$. Autrement dit, $F + G$ est une primitive de $f + g$; c'est le point (PR1) cité ci-dessous. On peut justifier de même tous les résultats (PR2) à (PR9). Il ne faut cependant pas croire que la mémorisation des résultats sur la dérivation suffit. Si on veut reconnaître efficacement des primitives, il est impératif de mémoriser les résultats de cette leçon.

À mémoriser

Dans le tableau qui suit, n est un entier naturel non nul et m est un entier naturel distinct de 0 et de 1.

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$
$x \mapsto x^{-m}$	$x \mapsto \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$



Si on excepte le domaine de validité, la première et la troisième formule ont exactement la même forme. Dans les calculs de dérivées et de primitives, vous aurez toujours intérêt à écrire la puissance d'une grandeur u sous la forme u^α où α est un entier relatif. Par exemple il vaut mieux écrire la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^7}$ sous la forme $x \mapsto x^{-7}$. On peut ainsi en trouver immédiatement une primitive, par exemple sur $\mathbb{R}^{+*}$, à savoir $x \mapsto \frac{x^{-7+1}}{-7+1}$, que l'on écrira plus communément $x \mapsto -\frac{1}{6x^6}$.

À mémoriser

Soit λ un réel non nul, μ un réel, et f, g deux fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant des primitives appelées respectivement F et G .

(PR1) Une primitive de $f + g$ est $F + G$.

(PR2) Une primitive de μf est μF .

(PR3) Une primitive de $x \mapsto f(\lambda x + \mu)$ est $x \mapsto \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \mu)$.



Comme aucune formule sur la dérivation ne permet de faire apparaître un produit ou un quotient de dérivées sous la forme de la dérivée d'une fonction, il n'existe pas de formule permettant de déterminer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions dont on sait déterminer des primitives. Pour reconnaître une dérivée dans un produit ou un quotient, on utilise les résultats qui suivent, qui sont une réécriture du point (D5) sur la dérivation dans quelques cas particuliers.

Technique

Soit n un entier relatif distinct de 0 et -1 . Soit u une fonction définie sur un intervalle I , à valeurs réelles, dérivable.

(PR4) Une primitive de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ est $x \mapsto e^{u(x)}$.

(PR5) Une primitive de $x \mapsto u'(x) \cos(u(x))$ est $x \mapsto \sin(u(x))$.

(PR6) Une primitive de $x \mapsto u'(x) \sin(u(x))$ est $x \mapsto -\cos(u(x))$.

(PR7) Une primitive de $x \mapsto u'(x)u(x)^n$ est $x \mapsto \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$.

La formule (PR7) est valable que n soit positif ou négatif, à condition d'imposer que la fonction u ne prenne pas la valeur 0 lorsque l'on manipule un entier n négatif.

(PR8) Si u ne prend pas la valeur 0, une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est $x \mapsto \ln(|u(x)|)$.

(PR9) Si u ne prend que des valeurs strictement positives, une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$.



Les points (PR4) à (PR7) permettent d'identifier des primitives de fonctions qui se présentent sous la forme d'un produit. Déterminons par exemple une primitive de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3 \sin(x) \cos(x) \end{aligned}$$

En notant que la fonction cosinus est la dérivée de la fonction sinus, la fonction f est de la forme $u'u$ à une constante multiplicative près. Une primitive de la fonction f est donc u^2 à une constante multiplicative près. Il s'ensuit qu'une primitive de f est $x \mapsto \sin^2(x)$ à une constante multiplicative près. Pour ajuster cette constante, on note que la dérivée de $x \mapsto \sin^2(x)$ est $x \mapsto 2 \sin(x) \cos(x)$. La propriété (PR1) assure alors qu'une primitive de f est le produit par $3/2$ de la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$. Finalement, une primitive de f est

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3 \sin^2(x)}{2} \end{aligned}$$

Notons pour conclure que si on avait transformé l'écriture de f à l'aide de la formule (T21) du formulaire de trigonométrie, on aurait noté que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3 \sin(2x)}{2}$$

Sous cette forme, le point (PR3) donne directement une primitive de f à savoir $x \mapsto -\frac{3 \cos(2x)}{4}$. Même si cette fonction ne ressemble pas à la première primitive trouvée, elle n'en diffère que d'une constante additive. Utilisez donc la formule (T20) du formulaire de trigonométrie pour vous en convaincre.



Les points (PR7) à (PR9) permettent d'identifier des primitives de fonctions qui se présentent sous la forme d'un quotient. Déterminons par exemple une primitive de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} \end{aligned}$$

En notant que la fonction $-\sin$ est la dérivée de $\cos$ donc aussi de la fonction $x \mapsto \cos(x) + 2$, la fonction f est de la forme $-u'/u$. Or si u est une fonction dérivable, une primitive de u'/u est $x \mapsto \ln(|u(x)|)$. Donc, en notant que $x \mapsto \cos(x) + 2$ ne prend que des valeurs strictement positives afin de supprimer les valeurs absolues, on sait qu'une primitive de f est

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\ln(\cos(x) + 2) \end{aligned}$$



Rappelons encore une fois que l'écriture systématique des puissances sous la forme u^α où u est une fonction et α est un entier relatif différent de 0 et -1 permet d'utiliser efficacement la formule (PR7). Déterminons par exemple une primitive de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^3} \end{aligned}$$

On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)^{-3}$. Comme la dérivée de $u : x \mapsto x^2-4x+5$ est $x \mapsto 2(x-2)$, on peut utiliser la formule (PR7). En effet, $f = u'u^{-3}/2$. On en déduit qu'une primitive de la fonction f est u^{-2} à une constante multiplicative près. Or

la dérivée de u^{-2} est $-2u'u^{-3}$

donc la dérivée de $\frac{-u^{-2}}{4}$ est $\frac{u'u^{-3}}{2}$

donc une primitive de f est $\frac{-u^{-2}}{4}$

Finalement, une primitive de f est

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\frac{1}{4(x^2-4x+5)^2} \end{aligned}$$

1.2 Entraînement

Exercice 69

Donner l'expression explicite d'une primitive de chacune des fonctions qui suit. Il sera nécessaire de transformer l'écriture de certaines fonctions pour faire apparaître des modèles connus de primitives.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x+1)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 :]-1/2; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5 :]-2; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x+3}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3x}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x)(\cos(x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_8 : \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_9 : \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

1.3 Travail facultatif

Vous pourrez continuer à travailler la technique en menant les calculs des exercices d'entraînement 131 et 132. Les plus curieux pourront travailler l'exercice de recherche 186.

2 Révisions

Exercice 70

Soit x et y deux complexes. Écrire chacun des nombres suivant sous la forme d'une unique fraction dont les numérateurs et dénominateurs sont des expressions polynomiales factorisées. Dans ces calculs, on suppose avoir choisi le complexe x de telle sorte que les dénominateurs apparaissant soient non nuls.

$$A = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{1-x}, \quad B = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \frac{x-1}{x}$$

Exercice 71

Simplifier au plus l'écriture des réels suivants. En particulier aucune racine carrée ne doit apparaître dans un dénominateur.

$$A = \sqrt{3}(2 - \sqrt{2}) + \sqrt{24} - \sqrt{12}, \quad B = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

Indications des exercices

Indications pour l'exercice 1

Dans toutes les questions, pensez à simplifier les fractions à chaque étape du calcul, et même avant de commencer le calcul, les données fournies n'étant pas toujours écrites de manière optimale. On pourra en particulier simplifier l'écriture initiale de D . N'effectuez pas de calculs inutiles. En particulier, N'effectuez pas a priori les multiplications dans les numérateurs et les dénominateurs des fractions qui apparaissent sous forme d'un produit. Les simplifications éventuelles n'en seront que plus visibles. Notez enfin que

- un dénominateur commun pour les termes de A est 12,
- un dénominateur commun pour les termes de B est 48,
- un dénominateur commun pour les termes du numérateur de C est 15.

Indications pour l'exercice 2

Pour le choix d'un dénominateur commun des termes de C , vous noterez que $2a + 2 = 2(a + 1)$.

Indications pour l'exercice 3

Dans la troisième question, on pourra noter que le facteur devant x du numérateur est 3 (lecture de la fraction de gauche) et est le produit par 2 du premier rationnel cherché (lecture de la fraction de droite). On peut ainsi trouver ce premier rationnel. Identifier alors les termes constants des numérateurs de la fraction considérée permet de trouver «de tête» le deuxième rationnel.

Indications pour l'exercice 5

Comme $12 = 2^2 \times 3$, on peut décomposer tous les entiers intervenant dans l'écriture de B à l'aide de 2 et 3. Cependant, on peut être plus efficace en notant que $12 = 4 \times 3$ et $2^{2n} = 4^n$ et en décomposant donc les entiers intervenant dans l'écriture de B à l'aide de 4 et 3, ce qui conduit à l'utilisation de puissances moins élevées.

Indications pour l'exercice 9

Pour être efficace dans certains développements, repérez les identités remarquables; en particulier, pour tous complexes a et b , on peut développer sans calcul $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Toujours pour des questions d'efficacité, vous noterez que $4x + 2y = 2(2x + y)$ avant de choisir un dénominateur commun des termes de C . Enfin, n'oubliez pas de simplifier les fractions finales lorsque c'est possible.

Indications pour l'exercice 11

Les deux premières transformations ont été étudiées dans l'exercice 3, dont vous pourrez relire le corrigé. Notez par ailleurs qu'il est plus simple de visualiser la transformation de la question 2 sous la forme

$$\frac{4x + 1}{3x + 1} = \frac{? \times (3x + 1) + ?}{3x + 1}$$

qui est exactement la même forme que celle de la question 1 si on ne considère que l'égalité des numérateurs (les dénominateurs sont les mêmes). Pour préciser numériquement la transformation de la question 3, imaginez par exemple le terme en x après développement dans les deux écritures proposées.

Indications pour l'exercice 12

L'objectif est de montrer que $(c(a^2 - b^2))^2 + (2abc)^2 = (c(a^2 + b^2))^2$. Mais il est plus simple de vérifier que

$$(c(a^2 - b^2))^2 + (2abc)^2 - (c(a^2 + b^2))^2 = 0$$

On peut opérer en développant brutalement le membre de gauche de l'égalité, ce qui est le thème de la leçon et **doit** être effectué à titre d'entraînement. Après quoi, ceux qui veulent réfléchir à une méthode plus efficace, et se préparer à la leçon suivante, pourront noter que $(c(a^2 - b^2))^2 - (c(a^2 + b^2))^2$ est la différence de deux carrés; une identité remarquable bien connue (vous pouvez jeter un œil sur l'identité (IR3) de la leçon qui suit) permet de réécrire cette différence sous une autre forme, bien plus simple dans notre cas.

Indications pour l'exercice 14

Pour la transformation de B , on pourra noter que $4x^2 = (2x)^2$. Il est donc inutile de mettre en facteur 2 avant l'identification du «carré parfait».

Indications pour l'exercice 15

- Pour factoriser A_1 , on notera que $A_1 = (x^2)^2 + 18x^2 + 81$. Notez aussi que comme on travaille dans $\mathbb{C}$, pour tout réel positif a , on est capable de factoriser l'expression $x^2 + a^2$ sous la forme $(x - ia)(x + ia)$.
- Pour factoriser A_2 , on pourra relire l'identité (IR3).
- Pour factoriser A_3 , on pourra écrire $A_3 = (x^2 - 2x + 1) - (x - 1)(2x + 3)$ et noter que le premier terme de la différence a une forme bien particulière.
- Pour factoriser A_4 , on cherchera les facteurs $x + 2$ et $2x + 5$ dans chacun des trois termes de la somme.

Indications pour l'exercice 16

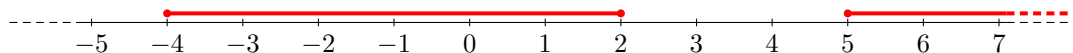
- Les points d'annulation du dénominateur de A sont immédiats à trouver. Testez-les comme point d'annulation du numérateur de A . Si l'un d'entre eux convient, alors il y a un facteur commun entre le numérateur et le dénominateur de A et on peut simplifier cette fraction. Notez de plus que dans ce cas, vous connaissez un point d'annulation du numérateur de A , qui se factorise alors de manière immédiate en utilisant l'astuce déjà mise en œuvre dans l'exercice 13.
- Prenez garde au choix du dénominateur commun aux termes de B ; ce n'est pas le produit des dénominateurs des termes de B . Factorisez le dénominateur du deuxième terme de B à l'aide de (IR3) pour vous en convaincre.

Indications pour l'exercice 18

Pour le choix d'un dénominateur commun des termes de B , vous noterez que $2a - 2 = -2(1 - a)$.

Indications pour l'exercice 19

Dans la question 3, on cherche les réels x qui vérifient simultanément les contraintes $|x + 1| \geq 2$ et $|x - 1| \leq 6$. Autrement dit on cherche l'intersection de l'ensemble A formé par les réels x vérifiant $|x + 1| \geq 2$ et de l'ensemble B formé par les réels x vérifiant $|x - 1| \leq 6$. Vous pourrez déterminer les ensembles A et B comme dans les deux premières questions puis préciser l'intersection de A et B graphiquement en plaçant sur la droite représentant $\mathbb{R}$ les ensembles A et B . Afin d'éclaircir cette dernière phrase, notez par exemple que l'ensemble $[-4; 2] \cup [5; +\infty[$ (qui n'a aucun rapport avec la question posée...) peut être représenté par le schéma suivant.



Indications pour l'exercice 22

Notez que les dénominateurs des termes de C sont conjugués. La mise au même dénominateur de ces deux termes conduira donc automatiquement à faire disparaître les racines carrées au dénominateur de C . Il est donc inutile d'effectuer cette opération avant d'écrire C sous la forme d'une seule fraction.

Indications pour l'exercice 23

Notez que le numérateur de C est $(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1$, ce qui permet de le réécrire sous une forme plus condensée.

Indications pour l'exercice 24

Il suffit, pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, de développer $(xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2 - (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$.

Indications pour l'exercice 25

Il suffit, pour tout $x \in [0; 1]$, de factoriser $\frac{1}{4} - x(1 - x)$. Notez qu'une fois développée, cette expression a une forme bien particulière.

Indications pour l'exercice 26

Les deux questions se font de la même manière, même si les calculs mis en jeu pour la seconde sont plus lourds. Dans chaque cas, on fixe des variables et on écrit l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité étudiée du même côté du signe $\geq$ de telle sorte que son signe soit clair (forme factorisée, somme de carrés...). Par exemple, dans le cas de la question 1, on fixe $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ et on factorise

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')^2$$

Comme aucune factorisation n'apparaît directement, on commence par développer et réduire l'expression. Vous devriez alors voir apparaître un carré parfait. Le cas de la deuxième question est plus pénible car après développement et réduction de l'expression pertinente, à savoir

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xy + x'y' + zz')^2,$$

il faut encore regrouper les neuf termes de l'expression obtenue trois par trois afin d'écrire cette dernière sous la forme de la somme de trois carrés parfaits.

Indications pour l'exercice 27

- On pourra remarquer que le premier terme de A s'écrit aussi $\frac{2x-1}{2x+1}$, ce qui permet de choisir un dénominateur commun simple pour les trois termes de A .
- Comme $2x(1+2x) = x(2+4x)$, un facteur commun au deux termes du numérateur de B est $x(2+4x)$.

Indications pour l'exercice 28

- Pour gérer l'expression A , notez que $5^{2n} = (5^n)^2$ et $4^n = (2^n)^2$; le numérateur de A se gère donc avec l'identité (IR3).
- Pour gérer l'expression B , notez que pour tout réel positif a , $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$. En écrivant que $12 = 2^2 \times 3$ et que $6 = 2 \times 3$, vous devriez faire apparaître des simplifications. Si tel n'est pas le cas, relisez aussi la simplification des racines carrées vue dans la première manipulation de l'exercice 22 pour réécrire $\sqrt{12^n}$ de manière plus simple.

Indications pour l'exercice 29

Toutes les expressions proposées sont de la forme e^A où A est un réel dépendant de x et éventuellement de y . Pour simplifier l'écriture de telles expressions, il suffit d'écrire A sous la forme $\ln(B)$ où B est un réel dépendant de x et éventuellement de y . L'usage de la propriété (LE2) assure alors que $e^A = B$. On en déduit que

- Pour gérer A , il suffit de trouver un réel simple noté $?$, dépendant de x tel que $-\ln(x) = \ln(?)$.
- Pour gérer B , il suffit de trouver un réel simple noté $?$, dépendant de x tel que $\frac{\ln(x)}{2} = \ln(?)$.
- Le cas de C est un peu plus complexe car $-x - \ln(x) - 2\ln(y)$ ne s'écrit pas de manière naturelle sous la forme d'un logarithme. On peut alors utiliser la propriété (ER1) pour écrire C comme le produit de deux exponentielles, la seconde se simplifiant en travaillant comme dans le cas de A et B .
- Pour gérer D , il suffit de trouver un réel simple noté $?$, dépendant de x et y tel que $\frac{\ln(x) + \ln(y)}{2} = \ln(?)$.

Indications pour l'exercice 30

Toutes les expressions proposées sont de la forme $\ln(A)$ où A est un réel dépendant de x . Pour simplifier l'écriture de telles expressions, il suffit d'écrire A sous la forme e^B où B est un réel dépendant de x . L'usage de la propriété (LE1) assure alors que $\ln(A) = B$. Le travail à faire est donc analogue à celui de l'exercice 29. Notez que pour gérer A , on aura intérêt à écrire préalablement cette expression sous la forme de la somme de deux logarithmes, dont l'un se gère immédiatement avec (LE1).

Indications pour l'exercice 31

1. L'objectif de cette question est de prouver une identité. La rédaction de la réponse est alors «classique». On fixe un réel x , puis on montre la relation voulue. Dans cette question, développer

$$f(x)^2 - g(x)^2 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

conduit directement au résultat voulu.

2. Pour cette deuxième identité, on peut fixer x puis développer

$$2f(x)^2 - f(2x) \quad \text{soit} \quad 2 \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

pour obtenir 1 ou bien développer

$$2f(x)^2 - 1 \quad \text{soit} \quad 2 \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1$$

pour obtenir $f(2x)$. Cette deuxième méthode est un peu plus rapide à rédiger.

3. Pour cette troisième identité, on peut fixer x puis développer

$$2f(x)g(x) - g(2x) \quad \text{soit} \quad 2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

pour obtenir 0 ou bien développer

$$2f(x)g(x) \quad \text{soit} \quad 2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

pour obtenir $g(2x)$. Cette deuxième méthode est un peu plus rapide à rédiger.

Indications pour l'exercice 32

Cet exercice est fondé sur le fait que si x et y sont des réels, on peut mettre e^y en facteur dans e^x en écrivant $e^x = e^y \times e^{x-y}$ à l'aide de la propriété (ER2). En particulier, pour tout réel x , on peut écrire $1 = e^x e^{-x}$. Par exemple, pour tous réels x et y on peut mettre e^{x+2} en facteur dans $1 + e^{x+y} + e^{2x+1}$ en écrivant

$$1 + e^{x+y} + e^{2x+1} = e^{x+2} (e^{-(x+2)} + e^{x+y-(x+2)} + e^{2x+1-(x+2)}) = e^{x+2} (e^{-x-2} + e^{y-2} + e^{x-3})$$

Cette manipulation est très souvent utile et doit pouvoir être effectuée «de tête».

Indications pour l'exercice 33

Lorsque vous aurez une expression simple a du carré de $\sqrt{7-\sqrt{5}} + \sqrt{7+\sqrt{5}}$, n'oubliez pas de vérifier une contrainte sur ce nombre avant d'écrire qu'il est égal à $\sqrt{a}$.

Indications pour l'exercice 34

- On pourra relire (IR3) avant de gérer le cas de A .
- En écrivant $B = (x^2 - 4x + 4) + 5(x^2 - 4) + (6 - 3x)(x + 3)$, vous devriez pouvoir mettre $x - 2$ en facteur.

Indications pour l'exercice 35

Vous pourrez relire les exemples du cours page 11 et le corrigé de l'exercice 14.

Indications pour l'exercice 36

Dans cet exercice, utilisez la croissance des fonctions exponentielle, logarithme et racine carrée. Avant tout produit d'une inégalité par un réel, vérifiez le signe de ce réel; s'il est inconnu, distinguez deux cas. Enfin, dans la dernière question, pensez aussi à regarder le signe des grandeurs manipulées. En effet, si a est un réel positif et b est un réel négatif alors $b \leq a$ de manière immédiate.

Indications pour l'exercice 37

- On ne peut classer les carrés de deux nombres que lorsque l'on sait classer ces nombres et qu'on en connaît le signe; en effet la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour encadrer x^2 , on doit donc travailler successivement sur l'intervalle $[-1; 0]$ puis sur l'intervalle $[0; 2]$. Une fois déterminé un encadrement de x^2 sur chacun de ces intervalles, on conserve l'encadrement le moins précis, qui seul est valable dans les deux situations.
- Ne soustrayez pas des inégalités. Si a, b, a', b', x et x' sont six réels tels que $a \leq x \leq b$ et $a' \leq x' \leq b'$ et que l'on veut encadrer $x - x'$, on opère en deux étapes. On sait que $-b' \leq -x' \leq -a'$ donc que $a - b' \leq x - x' \leq b - a'$. Vous noterez que cela ne revient à «soustraire» les encadrements.

Indications pour l'exercice 38

- Ne divisez pas des inégalités. Si a, b, a', b', x et x' sont six réels strictement positifs tels que $a \leq x \leq b$ et $a' \leq x' \leq b'$ et que l'on veut encadrer $\frac{x}{x'}$, on opère en deux étapes. On sait que $\frac{1}{b'} \leq \frac{1}{x'} \leq \frac{1}{a'}$ donc que $\frac{a}{b'} \leq \frac{x}{x'} \leq \frac{b}{a'}$. Vous noterez que cela ne revient à «diviser» les encadrements. On peut adapter ce calcul au cas où un des encadrements, voire les deux, est formé de grandeurs strictement négatives en se ramenant systématiquement à des grandeurs strictement positives.
- Pour effectuer le premier calcul «de tête», vous pourrez relire le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11.

Indications pour l'exercice 39

Vous pourrez relire les corrigés des exercices 5, 6 et 17.

Indications pour l'exercice 40

Commencez par simplifier les racines carrées apparaissant au numérateur de A . À ce sujet, vous pourrez relire le corrigé des exercices 22 et 28. Pour achever le calcul, pensez à utiliser l'identité remarquable (IR3) plutôt que d'utiliser la notion de «quantité conjuguée».

Indications pour l'exercice 41

Seul le dernier calcul pose problème. En effet si vous ramenez le calcul demandé à celui du sinus d'un angle appartenant à $[0; 2\pi]$, vous serez amené à calculer $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$, qui n'est pas une valeur remarquable. Utilisez alors la formule (T20) qui vous permettra de calculer le carré du sinus cherché. Déterminez le signe de ce réel et vous pourrez conclure.

Indications pour l'exercice 42

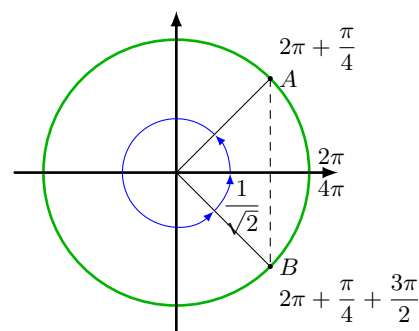
Pensez à utiliser (T4) et (T10) pour remplacer les produits d'un rationnel et de π apparaissant à l'«intérieur» des sinus et cosinus par des produit d'un rationnel appartenant à $[-1; 1]$ et de π . Par exemple

$$\sin\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\alpha)$$

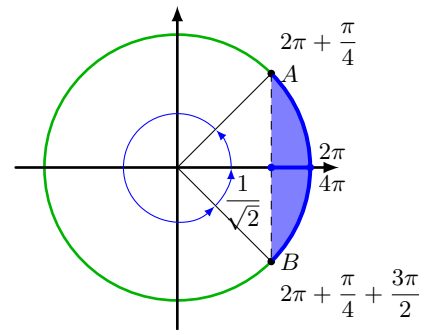
Les deux dernières égalités de cet exemple sont les propriétés (T13) et (T8); on pouvait sauter une étape en visualisant le problème directement sur le cercle trigonométrique comme dans le cours.

Indications pour l'exercice 43

Travaillez sur un cercle trigonométrique pour résoudre les questions posées. On veut par exemple chercher tous les réels t appartenant à $[2\pi; 4\pi]$ tels que $\cos(t) = 1/\sqrt{2}$. En premier lieu, on repère sur le cercle trigonométrique les bornes de l'intervalle manipulé, à savoir 2π et 4π et les points d'intersection A et B du cercle et de la droite verticale passant par le point de coordonnées $(1/\sqrt{2}, 0)$; la figure obtenue est placée ci-contre. On «suit» alors le cercle trigonométrique depuis le point correspondant à l'angle de mesure 2π jusqu'au point A ; pour ce faire, on «tourne» d'un angle de mesure $\pi/4$ donc le premier réel cherché est $2\pi + \pi/4$. On poursuit alors notre tour du cercle trigonométrique jusqu'au point B ; pour ce faire, on «tourne» d'un angle de mesure $3\pi/2$ donc le deuxième réel cherché est $2\pi + \pi/4 + 3\pi/2$. Enfin, on achève notre parcours de l'ensemble de recherche en «tournant» jusqu'au point correspondant à l'angle de mesure 4π . Finalement les deux réels cherchés sont $9\pi/4$ et $15\pi/4$.



Le travail n'est pas très différent pour les inéquations. On veut par exemple chercher tous les réels t appartenant à $[2\pi; 4\pi]$ tels que $\cos(t) \geq 1/\sqrt{2}$. En premier lieu, on repère sur le cercle trigonométrique les bornes de l'intervalle manipulé, à savoir 2π et 4π , les points d'intersection A et B du cercle et de la droite verticale passant par le point de coordonnées $(1/\sqrt{2}, 0)$ et la partie du cercle correspondant aux angles cherchés, tracée en bleu sur la figure placée ci-contre. On «suit» alors le cercle trigonométrique comme dans le cas des équations mais en retenant toutes les mesures des angles correspondant à l'arc de cercle mis en valeur et pas seulement les extrémités de cet arc. Finalement l'ensemble des réels cherché est $[2\pi; 9\pi/4] \cup [15\pi/4; 4\pi]$.



Indications pour l'exercice 44

- Dans cet exercice, on montre deux identités. Allez relire le corrigé de l'exercice 31 pour savoir comment commencer une telle preuve. Après remplacement des termes de la forme $f(a)$ où a est un réel par $\sin(a)/\cos(a)$ et simplification des expressions obtenues, vous pourrez conclure à l'aide de (T18) et (T21) dans la question 1, et à l'aide de (T15) et (T17) dans la question 2.
- Dans la première partie de la question 2, ne pas «soustraire» les encadrements portant sur x et y . Vous pouvez même relire le corrigé de l'exercice 37 pour vous convaincre de l'inanité de cette idée.

Indications pour l'exercice 45

Vous pourrez relire les exemples du cours page 11 et le corrigé des exercices 14 et 35.

Indications pour l'exercice 46

Allez relire le corrigé de l'exercice 19 si vous ne savez plus comment gérer ces questions. Dans la question 2 vous serez amenés à chercher l'ensemble des réels x vérifiant $x^2 \leq 3$. N'inventez pas de résultat! Utilisez la croissance des fonctions carré et racine carrée et n'oubliez pas que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Indications pour l'exercice 47

1. Vous pourrez relire le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question de l'exercice 38.
2. Vous pourrez relire le corrigé de la question 3 de l'exercice 11. Vous serez alors amenés à chercher deux rationnels, remplacés par un ? dans ce qui suit même s'ils ne sont pas égaux, tels que pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/2, 1\}$, $?(x-1) + (2x+1) = ?$.

Indications pour l'exercice 48

Pour gérer C , notez qu'une puissance d'ordre 4 est le carré d'un carré. Pour gérer D , soyez efficace: l'élévation au cube d'un complexe étant pénible, il vaut mieux n'en effectuer qu'une. Transformez l'écriture de D afin que ce soit le cas. Enfin, vous pourrez relire la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le cube restant.

Indications pour l'exercice 49

Notez que que l'on peut exprimer z^{50} sous la forme du produit de z^2 et d'une puissance de z^4 .

Indications pour l'exercice 50

Les manipulations demandées sont les mêmes que dans les exercices 5, 17 et 39, dont vous pourrez relire les corrigés.

Indications pour l'exercice 52

Utilisez l'identité (IR3) pour faire apparaître $4x - 5y$ et $2x - y$ comme facteur commun dans chaque terme de B .

Indications pour l'exercice 53

Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25 et 26. La méthode de base consiste à fixer une variable x puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même côté du signe de comparaison. Autrement dit il suffit de factoriser $1 - x^2 - (1 - x)^2$ pour conclure.

Indications pour l'exercice 55

Il est facile de placer sur le cercle trigonométrique des mesures d'angle appartenant à $[-2\pi; 2\pi]$, ne serait-ce que parce que l'on fait moins d'un «tour» pour passer de 0 à 2π ou -2π . Placer sur le cercle des mesures d'angle en dehors de cet intervalle est souvent plus pénible. Or il arrive souvent que l'on doive trouver la forme trigonométrique de complexes dont un argument est de la forme $p\pi/q$ où $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^{+*}$ tels que $|p| > 2q$. Pour ce faire, on utilise le fait que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\exp\left(\frac{p\pi i}{q}\right) = \exp\left(\left(\frac{p\pi}{q} + 2k\pi\right)i\right)$$

Il nous suffit donc de trouver k tel que $|p - 2kq| \leq 2q$. Autrement dit, il suffit de poser la **division euclidienne** [?] de p par $2q$ et d'utiliser le quotient comme entier k . Notez qu'alors $0 \leq p - 2kq < 2q$, ce qui est bien meilleur que ce que l'on voulait. Par exemple, pour calculer $e^{237i\pi/6}$, on note que $237 = 12 \times 19 + 9$ donc

$$\frac{237\pi}{6} = 2 \times 19\pi + \frac{9\pi}{6} = 38\pi + \frac{3\pi}{2} \quad \text{donc} \quad e^{237i\pi/6} = e^{3i\pi/2} = -i$$

On pourra gérer le cas de z_4 en mettant en œuvre ces considérations.

Indications pour l'exercice 57

Soit z un complexe non nul. Les indications de l'exercice 55 vous permettent de trouver un argument α de z appartenant à $[0; 2\pi[$. Si α appartient à $[0; \pi[$, c'est l'argument principal de z . Dans le cas contraire α appartient à $]\pi; 2\pi[$ donc $\alpha - 2\pi$ appartient à $]-\pi; 0[$; le réel $\alpha - 2\pi$ est donc l'argument principal de z .

Indications pour l'exercice 58

Dans cet exercice, les puissances à calculer sont trop élevées pour travailler avec la forme algébrique des complexes. On doit donc utiliser la forme trigonométrique des complexes. Plus précisément, soit z est un complexe et n est un entier. Pour trouver la forme algébrique du complexe z^n , on peut opérer en trois étapes

- On écrit z sous forme trigonométrique,
- On calcule immédiatement z^n à l'aide de la dernière remarque technique de la leçon,
- On traduit le résultat sous forme algébrique.

Afin d'aboutir dans la première étape, il faut savoir que $1, i, \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ont des formes trigonométriques explicites; placez ces complexes sur le cercle trigonométrique pour vous en convaincre. Enfin, lorsque z est lui-même construit à partir d'autres complexes à l'aide d'opérateurs $+$, $-$, $\times$ et $/$, se pose la question savoir s'il est préférable de transformer ces autres complexes sous forme trigonométrique avant d'effectuer les opérations ou d'effectuer les opérations en premier lieu. Relire le paragraphe qui suit la dernière remarque technique de la leçon vous permettra de faire le choix le plus efficace.

Indications pour l'exercice 59

Notez que 1 en est un point d'annulation évident du dénominateur de B . Vous pouvez donc factoriser cette expression sans calcul comme dans les exercices 13 ou 16. Il apparaît alors un facteur commun entre le dénominateur de B et tous les termes du numérateur de cette expression. Après simplification de B , n'oubliez pas de factoriser son numérateur comme les consignes l'imposent.

Indications pour l'exercice 60

Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. Pour être plus efficace encore, vous pourrez regrouper les deux identités en une seule en relisant le point (V4) sur les valeurs absolues... mais le gain en temps est minime.

Indications pour l'exercice 61

Dans cet exercice, faites attention à la place des parenthèses; vous pourrez relire la première remarque de la leçon. Notez aussi que pour tout réel c et tous entiers naturels p et q vérifiant $p \leq q$, la somme

$$\sum_{k=p}^q c$$

est le produit par c du nombre de termes de cette somme, soit $(q - p + 1)c$.

Indications pour l'exercice 62

Ne pas oublier de distinguer **systématiquement** deux cas suivant que la raison de la suite géométrique dont on somme certains termes vaut 1 ou pas. De plus

- Vous pourrez montrer que $S_3 = y^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{y}\right)^k$, avant d'appliquer (S5).
- Vous pourrez montrer que $S_4 = e^x \sum_{k=1}^n (e^x)^k$, avant d'appliquer (S5) en prenant garde au fait le premier indice de la somme est 1 et pas 0. Vous pourrez gérer ce problème avec la première méthode décrite dans la dernière remarque technique de la leçon. Si vous préférez utiliser la deuxième technique exposée dans cette remarque, vous montrerez que

$$S_4 = e^{2x} \sum_{k=0}^{n-1} (e^x)^k$$

- Pour gérer le fait que S_5 n'est pas indicée par un ensemble d'entiers consécutifs «commençant» à 0, vous pourrez ici aussi utiliser une des deux techniques de la dernière remarque du cours, voire les deux techniques si vous voulez vous entraîner encore mieux. En utilisant la deuxième technique, vous montrerez que

$$S_5 = 4x^n \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

Indications pour l'exercice 63

- Vous pourrez réordonner les termes de A afin d'additionner toutes les fractions ayant 5 comme dénominateur et toutes les fractions ayant 7 comme dénominateur, avant de mettre au même dénominateur les deux fractions résultant de ces premiers calculs.
- Un dénominateur commun de B est 24.

Indications pour l'exercice 64

Vous pourrez relire la deuxième leçon sur les développements d'expressions polynomiales et le corrigé de l'exercice 10.

Indications pour l'exercice 65

- Vous pourrez réordonner les termes de A pour faire apparaître un carré parfait.
- Vous pourrez réordonner les termes de B pour mettre en facteur $x - y$ dans chacun d'entre eux.

Indications pour l'exercice 66

Pour dériver une fonction, il faut reconnaître dans l'expression de cette fonction un des modèles du cours présenté dans les points (D1) à (D5). Transformer l'expression de la fonction à dériver permet parfois de se rattacher à un modèle moins pénible à exploiter; on pourra relire le dernier exemple du cours. Notez que le point (D5) est délicat à repérer et à utiliser **sauf** dans un cas: si a et b sont deux réels et si f est une fonction, la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$ est $x \mapsto af'(ax + b)$. Soulignons enfin quelques points particuliers.

- On peut transformer l'écriture de f_3 avec le point (T21) du cours de trigonométrie.
- On transformera l'écriture de f_7 sous la forme d'une puissance $x \mapsto x^\alpha$ pour entier un α pertinent.
- On peut écrire l'expression de f_8 sous la forme de la somme d'une constante et de l'inverse d'une expression polynomiale de degré 2 en utilisant la même technique que celle travaillée dans les exercices 3, 11, 38 et 47.
- On peut écrire l'expression de f_9 sous la forme du produit d'une expression polynomiale et d'une exponentielle à l'aide des points (ER2) et (ER3) du cours sur l'exponentielle.
- Les calculs des dérivées des fonctions f_{10} , f_{11} et f_{12} repose sur le modèle (D5) du cours en identifiant chaque fois des fonctions f et u . Dans le cas de f_{11} , l'expression de u peut être simplifiée à l'aide de la formule (LN1).

Indications pour l'exercice 67

L'exercice est une généralisation sur un exemple de la méthode de la «quantité conjuguée», vue dans les exercices 22 et 23. Pensez aussi à simplifier toute les racines carrées comme dans le premier exercice cité.

Indications pour l'exercice 68

L'objectif de cet exercice est de montrer deux identités qui sont des égalités. À ce sujet, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 31 qui expose et illustre la méthode pour aborder ce genre de preuve, et ceux des exercices 24 et 44 qui présentent d'autres exemples de cette méthode.

Indications pour l'exercice 69

Les calculs de primitives sont des exercices d'identification de modèles connus. De manière analogue aux calculs de dérivées effectués dans l'exercice 66, il est souvent utile de réécrire l'expression de la fonction dont on cherche une primitive pour faire apparaître un de ces modèles. Notez que l'on identifie souvent les modèles « à une constante multiplicative près »; si la constante n'est pas claire, une dérivation rapide permet de la préciser. On cherche par exemple une primitive de la fonction $f : x \mapsto 4x^3 \cos(3x^4)$. Comme la dérivée de $x \mapsto 3x^4$ est $x \mapsto 12x^3$, on peut noter que f est de la forme $x \mapsto u'(x) \cos(u(x))$ où u est la fonction $x \mapsto 3x^4$, **à un facteur multiplicatif constant près**. On peut trouver ce facteur « de tête » et proposer comme primitive de f la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(3x^4)}{3}$$

On peut aussi dériver rapidement $g : x \mapsto \sin(3x^4)$ pour trouver $x \mapsto 12x^3 \cos(3x^4)$ et retrouver qu'une primitive de f est la fonction g multipliée par $1/3$ afin de corriger le facteur 12 en un facteur 4. En ce qui concerne les réécritures utiles et les modèles à utiliser, vous noterez les points suivants.

- Les calculs de primitives de f_1 , f_2 et f_3 sont fondés sur le modèle (PR3).
- On transformera l'écriture de f_4 sous la forme d'une puissance $x \mapsto x^\alpha$ pour entier un α pertinent.
- On peut écrire l'expression de f_5 sous la forme de la somme d'une constante et de l'inverse d'une expression polynomiale de degré 1 en utilisant la même technique que celle travaillée dans les exercices 3, 11, 38 et 47. On gère alors le calcul d'une primitive de la somme obtenue à l'aide de (PR1), le deuxième terme de la somme suivant le modèle (PR3).
- Le calcul d'une primitive de f_6 est fondé sur le modèle (PR8).
- Les calculs de primitives de f_7 et f_8 sont fondés sur le modèle (PR7).
- Le calcul d'une primitive de f_9 est fondé sur le modèle (PR4).

Indications pour l'exercice 70

Vous noterez que le dénominateur du deuxième terme formant A est $(x-1)(x+1)$.

Indications pour l'exercice 71

Les méthodes utilisées dans cet exercice ont été travaillées dans les exercices 22, 23 et 67.

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 1

- Comme $4 = 2 \times 2$, un dénominateur commun des trois fractions qui sont les termes de A est 4×3 , soit 12. On note alors que

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$$

- Comme $3 \times 8 = 24$ et $2 \times 8 = 16$, un multiple commun de 16 et 24 est $3 \times 2 \times 8$, soit 48. On peut donc écrire

$$B = \frac{1}{24} - \frac{1}{16} = \frac{2}{48} - \frac{3}{48} = -\frac{1}{48}$$

Même un calcul «élémentaire» demande quelques secondes de réflexion; il aurait été très maladroit de choisir comme dénominateur commun 24×16 . On peut aussi souligner un point de méthode: pourquoi doit-on apprendre des formules par cœur, que l'on peut retrouver sans difficulté dans un livre? Parce que cet apprentissage n'est que la première étape dans l'appropriation des dites formules. Nul doute que vous connaissiez vos tables de multiplication... et on peut trouver ces tables dans des ouvrages. Mais le problème n'était pas ici de savoir que $3 \times 8 = 24$ et $2 \times 8 = 16$, mais de savoir que 16 et 24 apparaissent dans la même table de multiplication. Vous avez tellement manipulé ces tables que cela peut vous paraître évident. Mais l'objectif est le même pour tous les formulaires: formulaire de dérivation, formulaire de trigonométrie, valeurs remarquables prises par les fonctions usuelles... Il faut connaître tous ces résultats pour être capable de croiser ces informations entre elles.

$$C = \frac{\frac{7}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}} = \frac{\frac{7+5}{3 \times 5}}{\frac{3 \times 5 + 4 \times 12}{4 \times 5}}$$

Faites attention au dénominateur commun de la somme des fractions se trouvant au numérateur de C . Notez aussi que je n'ai pas effectué les produits apparaissant dans les dénominateurs des deux fractions constituant C . En effet, après quotient, des simplifications peuvent apparaître, bien plus visible sur la forme que j'ai conservée. Il sera toujours temps d'effectuer ces produits si cela est nécessaires. On poursuit le calcul.

$$C = \frac{7+5}{3 \times 5} \times \frac{4 \times 5}{3 \times 5 + 4 \times 12} = \frac{7+5}{3} \times \frac{4}{3 \times 5 + 4 \times 12}$$

Les 5 disparaissent... Encore un petit effort, en surveillant bien les simplifications qui apparaissent à chaque étape.

$$C = \frac{12}{3} \times \frac{4}{15+48} = 4 \times \frac{4}{63} = \frac{16}{63}$$

- Encore une fois, effectuez les simplifications au fur et à mesure du calcul.

$$D = \frac{\frac{3}{4} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{12}}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{2 \times 3 - 4}{3}} = \frac{\frac{3 \times 8 + 3}{8 \times 4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3 \times 8 + 3}{8 \times 4} \times \frac{3}{2} = \frac{81}{64}$$

Correction de l'exercice 2

$$A = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} = \frac{(a+1) - (a-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{2}{(a+1)(a-1)}$$

La forme développée du dénominateur de A est très simple... et prévisible si vous repérez une identité remarquable. Pour autant, faut-il développer? Pas du tout! On ne fait que les calculs demandés. Après tout, il est possible que la forme factorisée du dénominateur de A soit plus utile.

$$B = \frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+2} = \frac{(a+1)(a+2) + 2a(a+2) - a(a+1)}{a(a+1)(a+2)}$$

La forme compliquée du numérateur obtenue, ni développée, ni factorisée, nous conduit à tenter de tout développer dans l'espoir que la forme finale sera plus simple. On obtient

$$B = \frac{2(a^2 + 3a + 1)}{a(a+1)(a+2)}$$

C'est un peu plus lisible. On peut factoriser le numérateur de B puisque c'est un trinôme du second degré. Mais la valeur du discriminant de ce trinôme ne rend pas cette idée très attractive à moins que l'on veuille manipuler $\sqrt{5}$. Comme dans le calcul précédent, on va attendre de savoir ce à quoi sert le calcul avant d'aller plus loin. Pour illustrer cette idée, considérons la fonction

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto \frac{2(a^2 + 3a + 1)}{a(a+1)(a+2)}$$

Si on se pose la question de connaître la limite de f en $+\infty$, il est intéressant de développer le dénominateur de f et d'appliquer la règle que vous connaissez: la limite de f en $+\infty$ est celle de la fonction obtenue en effectuant le quotient des termes de plus haut degré. Dans notre cas, la limite de f en $+\infty$ est celle de $a \mapsto 2a^2/a^3$ soit 0. Si on cherche plutôt les points d'annulation de f , il vaut mieux factoriser le numérateur de f et noter que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$,

$$f(a) = \frac{2 \left(a + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \left(a + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)}{a(a+1)(a+2)}$$

Les points d'annulation de f sont donc $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Et si on cherche à dériver f ? Alors même mettre tous les termes constituant f au même dénominateur est une erreur. N'est-il pas plus simple de dériver une somme qu'un quotient?

- Notez avant tout que $2a+2 = 2(a+1)$. C'est évident... mais cela simplifie drastiquement le calcul.

$$C = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{2a+2} = \frac{2(2a+1) - 2(a+1) - (2a+1)}{2(a+1)(2a+1)} = -\frac{1}{2(a+1)(2a+1)}$$

Ne pas développer le numérateur de C ici serait une faute vue la simplicité prévisible du résultat. Notez que l'on aurait pu être encore plus efficace. En effet, si on regroupe d'abord les fractions composant C qui ont des dénominateurs «analogues», on obtient

$$C = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{2a+1} = \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{2a+1} = \frac{(2a+1) - 2(a+1)}{2(a+1)(2a+1)} = -\frac{1}{2(a+1)(2a+1)}$$

Correction de l'exercice 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{4/3\}$, $\frac{4x+3}{3x-4} = \frac{4}{3} \times \frac{x + \frac{3}{4}}{x - \frac{3}{4}}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-4\}$, $\frac{5x+2}{x+4} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \frac{5x}{2}}{1 + \frac{x}{4}}$.
3. Pour gérer cette dernière écriture, commençons par chercher le facteur a devant le terme $2x+3$ du numérateur de droite, en calculant le terme en x . En notant que ce terme est de la forme $2 \times a$ et qu'il vaut 3, on trouve immédiatement le premier rationnel. La recherche du second rationnel est alors immédiate en visualisant le développement du numérateur de la fraction de droite. On obtient ainsi que pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-3/2\}$,

$$\frac{3x+5}{2x+3} = \frac{\frac{3}{2} \times (2x+3) + \frac{1}{2}}{2x+3}$$

Notez que cela se réécrit

$$\frac{3x+5}{2x+3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2x+3)}$$

ce qui est l'objectif final de cette transformation. On peut ainsi transformer tout quotient de deux expressions polynomiales de degré 1 en la somme d'une constante et de l'inverse d'une expression polynomiale de degré 1. Cette idée est à mémoriser, la forme finale étant bien plus adaptée à quantité de calculs que l'on verra dans la suite de nos révisions: encadrements, dérivations, calcul de primitives...

Correction de l'exercice 4

$$\bullet A = \frac{10^{-9} \times 10^4}{(10^{-3})^2} = \frac{10^{-5}}{10^{-6}} = 10^1 = 10.$$

Pour la première égalité, on a géré le numérateur de A à l'aide de (P1) et le dénominateur de A à l'aide de (P2). Pour la deuxième égalité, on a de nouveau utilisé (P1) couplé avec la convention sur les puissance de fractions. Rechercher les formules exactes ayant permis d'effectuer un calcul permet d'éviter d'«inventer» des résultats folkloriques... ce qui arrive souvent dans les calculs un peu compliqués, que l'on veut à tout prix simplifier.

$$\bullet B = \frac{(10^{-3})^{-2} \times (10^4)^3}{(10^3)^2} = \frac{10^6 \times 10^{12}}{10^6} = 10^{12}.$$

Correction de l'exercice 5

- Pour écrire A sous forme d'une fraction irréductible, il est nécessaire de regrouper les puissance de chaque entier apparaissant dans les écritures des nombres composant A , soit 2, 3, et 5. On utilise (P3) pour séparer les facteurs de 10 et 15 dans la première étape, puis (P1) et (P2) pour regrouper les puissances d'un même facteur dans la deuxième étape.

$$A = \frac{(2^5)^3 \times (3 \times 5)^2}{(2 \times 5)^2} = \frac{(2^5)^3 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = 2^{13} \times 3^2$$

Notons que $A = 73728$, qui est encore une forme plus simple! Et ce résultat final est bien plus facile à calculer avec la forme simplifiée lorsqu'on n'a pas de machine à calculer... ce qui sera votre cas durant la plupart des épreuves de mathématiques au concours.

- Comme $2^2 = 4$ et $12 = 4 \times 3$, on peut ne travailler qu'avec 3 et 4. Vous noterez que l'on peut encore décomposer 4 en produit... mais ce n'est pas utile.

$$B = \frac{(-1)^{n+2} \times (4 \times 3)^n}{(2^2)^n \times ((-1) \times 3)^n} = \frac{(-1)^{n+2} \times 4^n \times 3^n}{4^n \times (-1)^n \times 3^n} = (-1)^2 = 1$$

Correction de l'exercice 6

- La question posée est peu précise. Que signifie «simple»? Dans l'absolu, cela n'a pas de sens. Une forme simple est juste une forme adaptée à la manipulation en cours; on pourra revoir et réétudier la correction de l'exercice 2. Dans notre cas, la réécriture des différents objets est l'objectif en soi, ce qui rend caduque la notion de «forme simple». On peut seulement estimer que pour A , regrouper les puissances communes est une bonne idée. On obtient alors en travaillant comme dans l'exercice précédent

$$A = \frac{a^2 \times b^2 \times b}{a^{3-n}} = a^{n-1}b^3$$

- Dans le cas de B , le regroupement des facteurs numériques et des diverses puissances simplifie assez nettement l'écriture de B . Ainsi

$$B = \frac{2a^3 + 6a^2b^2}{4a^2b} = \frac{2a^2(a + 3b^2)}{4a^2b} = \frac{a + 3b^2}{2b}$$

Ceci étant, écrire B sous la forme

$$B = \frac{a}{2b} + \frac{3b}{2}$$

est aussi simple, et nous verrons que cela peut être plus efficace. La différence essentielle entre les deux écritures est qu'elles n'ont pas le même opérateur principal (opérateur utilisé lors de la dernière opération): la première écriture conduit à utiliser une division lors de la dernière opération pour calculer B ; la seconde écriture utilise une addition.

Correction de l'exercice 7

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(2x + 3)^3 = 2^3 \times \left(x + \frac{3}{2}\right)^3 = 8 \left(x + \frac{3}{2}\right)^3$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(2x + 3)^3 = 3^3 \times \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^3 = 27 \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^3$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, $(2x + 3)^4 = x^4 \times \left(2 + \frac{3}{x}\right)^4$.

Correction de l'exercice 8

- Il n'y a malheureusement pas d'astuce pour effectuer ces calculs. Seules quelques techniques, que l'on verra en sup et qui sont décrites à la fin du corrigé permettent d'être un peu plus efficace. Ceci étant, en développant brutalement, vous avez dû trouver

$$\begin{aligned} A &= 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6, \\ B &= 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3, \\ C &= x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1, \\ D &= 2x^2 + 9y^2 - 3xy. \end{aligned}$$

À force de faire des calculs analogues, on peut mettre au point quelques techniques. Une fois ces techniques validées par une preuve, on les utilise pour être plus efficace. On démontrera en particulier en sup que lorsque l'on développe le carré d'une somme de termes, on obtient la somme des carrés des termes et de tous les «double-produits» que l'on peut former avec les termes de la somme manipulée. Par exemple, si a, b, c et d sont quatre complexes,

$$(a + b + c + d)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}_X + \underbrace{2ab + 2ac + 2ad}_Y + \underbrace{2bc + 2bd}_Z + \underbrace{2cd}_T$$

Dans le développement précédent,

- X est la somme des carrés des termes manipulés, à savoir a, b, c et d ,
- Y est la somme des double-produits des termes, l'un des deux étant a ,
- Z est la somme des double-produits des termes, l'un des deux étant b ... et l'on est attentif à ne pas réécrire le double-produit mettant en jeu a ,
- T est la somme des doubles produits des termes, l'un des deux étant c ...et l'on est attentif à ne pas réécrire les double-produits mettant en jeu a ou b .

Bien évidemment, tous les double-produits mettant en jeu d ont déjà été écrits. Développer l'expression C avec cette technique est assez efficace. D'autre part, pour développer les puissances positives quelconques de la somme de deux termes, on peut utiliser le triangle de Pascal. Plus précisément, si a et b sont deux complexes et si l'on veut développer la puissance d'ordre 5 de $a + b$, on écrit la cinquième ligne du triangle de Pascal, à savoir $(1, 5, 10, 10, 5, 1)$; le développement cherché est alors, en encadrant les combinaisons,

$$(a + b)^5 = \boxed{1} \times a^{5-0}b^0 + \boxed{5} \times a^{5-1}b^1 + \boxed{10} \times a^{5-2}b^2 + \boxed{10} \times a^{5-3}b^3 + \boxed{5} \times a^{5-4}b^4 + \boxed{1} \times a^{5-5}b^5$$

donc $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

L'algorithme est clair sur l'exemple. Pour développer l'expression B , on utilise ainsi la troisième ligne du triangle de Pascal, soit $(1, 3, 3, 1)$ et on peut directement écrire

$$(1 - 2x)^3 = \boxed{1} \times 1^{3-0} \times (-2x)^0 + \boxed{3} \times 1^{3-1} \times (-2x)^1 + \boxed{3} \times 1^{3-2} \times (-2x)^2 + \boxed{1} \times 1^{3-3} \times (-2x)^3$$

donc $(1 - 2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$

Correction de l'exercice 9

- Comme dans l'exercice précédent, il n'y a pas d'astuce pour effectuer les calculs. Tout au plus faut-il souligner lors du travail avec C que le premier dénominateur est le double du troisième et que l'on peut travailler avec $2(x + y)(2x + y)$ comme dénominateur commun. Repérer les identités remarquables permet aussi d'être un peu plus efficace dans certains développements. Par exemple, on sait sans calcul que $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ ou que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

$$A = \frac{x(x + 2) + (x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x + 2},$$

$$B = \frac{x(x - y) + y(x + y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2},$$

$$C = \frac{x(x + y) + y(2x + y) - 2(x + y)^2}{2(x + y)(2x + y)} = \frac{-x^2 - y^2 - xy}{4x^2 + 6xy + 2y^2} = -\frac{x^2 + y^2 + xy}{4x^2 + 6xy + 2y^2}.$$

La dernière transformation de C est facultative.

Correction de l'exercice 10

- Le terme en x de $(2x + 1)(3x - 2)$ est obtenu dans deux produits du développement: celui de $2x$ par -2 et celui de 1 par $3x$. Ce terme est donc $-x$.
- Le terme en x^2 de $(x + 1)(3x^2 + 2x + 2)(4x^2 + 7)$ est obtenu dans trois produits du développement: celui de x par $2x$ par 7 , celui de 1 par $3x^2$ par 7 et celui de 1 par 2 par $4x^2$. Ce terme est donc $43x^2$.
- Le terme en xy de $(x + y + z)^2$ est obtenu deux fois et vaut donc $2xy$. On pourra lire la remarque concernant le développement des carrés dans le corrigé de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 11

1. Pour gérer cette écriture, travaillons comme dans l'exercice 3. Commençons par chercher le facteur a devant le terme $3x - 1$ en considérant le facteur devant x après développement. En notant que ce facteur est de la forme $3 \times a$ et qu'il vaut 2, on trouve immédiatement ce rationnel. La recherche du second rationnel est alors immédiate. On obtient ainsi que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\frac{2}{3}(3x - 1) + \frac{5}{3} = 2x + 1$$

2. Visualisons la réécriture sous la forme $\frac{4x+1}{3x+1} = \frac{? \times (3x+1) + ?}{3x+1}$. On retrouve le problème de la question précédente. La même technique permet de trouver que pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/3\}$,

$$\frac{4x+1}{3x+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3(3x+1)}$$

Rappelons que la transformation du quotient de deux expressions polynomiales de degré 1 en la somme d'une constante et de l'inverse d'une expression polynomiale de degré 1 est à mémoriser, la forme finale étant bien plus adaptée à quantité de calculs: encadrements, dérivations, calculs de primitives...

3. En considérant par exemple le terme en x , on note que le premier rationnel cherché est -2 . On calcule alors le second pour finalement trouver que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $-2(x-1) + (2x+1) = 3$. Notez que si $x \notin \{-1/2, 1\}$, cela se réécrit

$$\frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(2x+1)}$$

ce qui est l'objectif final de cette transformation. On peut ainsi transformer l'inverse d'une expression polynomiale de degré 2 en la somme de deux inverses d'expressions polynomiales de degré 1. Encore une fois, cette idée est à mémoriser, la forme finale étant bien plus adaptée aux calculs déjà cités dans la réponse précédente.

Correction de l'exercice 12

- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, On note que

$$\begin{aligned} & (c(a^2 - b^2))^2 + (2abc)^2 - (c(a^2 + b^2))^2 \\ &= c^2(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2c^2 - c^2(a^2 + b^2)^2 && \text{utilisation de (P3)} \\ &= c^2((a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2) && \text{mise en facteur de } c^2 \\ &= c^2(((a^2 - b^2) - (a^2 + b^2))((a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)) + 4a^2b^2) && \text{utilisation d'une identité remarquable de factorisation} \\ &= c^2((-2b^2) \times (2a^2) + 4a^2b^2) && \text{simplification} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, le triplet $(c(a^2 - b^2), 2abc, c(a^2 + b^2))$ est une solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$. On peut mener un autre calcul à partir de la troisième égalité en développant simplement les différents termes, ce qui explique la présence de cet exercice dans ce chapitre. Mais ce développement brutal est moins efficace.

Correction de l'exercice 13

- Le réel 1 est un point d'annulation de la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 3$. Comme le produit des deux points d'annulation de cette fonction est 3, l'autre point d'annulation cherché est 3.
- Le réel 1 est un point d'annulation de la fonction $x \mapsto 2x^2 - x - 1$. Comme le produit des deux points d'annulation de cette fonction est $-1/2$, l'autre point d'annulation cherché est $-1/2$.
- Le réel -1 est un point d'annulation de la fonction $x \mapsto 3x^2 - x - 4$. Comme le produit des deux points d'annulation de cette fonction est $-4/3$, l'autre point d'annulation cherché est $4/3$.

Correction de l'exercice 14

- $A = 5 \left(x^2 + \frac{2x}{5} + \frac{1}{5} \right) = 5 \left(\left(x + \frac{1}{5} \right)^2 - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} \right) = 5 \left(\left(x + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{4}{25} \right)$
- On peut travailler avec B comme avec A . Mais il est plus efficace de repérer que $4x^2 = (2x)^2$ et qu'il est donc inutile de mettre 4 en facteur avant de commencer. Effectuer la même manipulation avec A aurait conduit à l'introduction de $\sqrt{5}$, ce qui n'est pas astucieux.

$$B = (2x)^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times (2x) + 3 = \left(2x - \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 3 = \left(2x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

Correction de l'exercice 15

- La première expression est un carré parfait que l'on repère en notant que $x^4 = (x^2)^2$. En effet $A_1 = (x^2 + 9)^2$. Comme on travaille dans $\mathbb{C}$, on peut continuer la factorisation en utilisant (IR3). En effet $x^2 + 9 = x^2 - (3i)^2$ donc $x^2 + 9 = (x - 3i)(x + 3i)$. Finalement une forme factorisée de A_1 est $A_1 = (x - 3i)^2(x + 3i)^2$.
- On peut factoriser A_2 en utilisant directement (IR3) pour trouver $A_2 = ((2x - 3) - (x + 7))((2x - 3) + (x + 7))$ donc $A_2 = (x - 10)(3x + 4)$.
- L'identité (IR2) permet de repérer un carré parfait en regroupant les deux premiers et le dernier termes de A_3 , ce qui permet d'achever la factorisation. Ainsi

$$A_3 = (x^2 - 2x + 1) - (x - 1)(2x + 3) = (x - 1)^2 - (x - 1)(2x + 3) = (x - 1)((x - 1) - (2x + 3)) = -(x - 1)(x + 4)$$

- Dans chaque terme de A_4 , on voit apparaître les facteurs $2x + 5$ et $x + 2$, ces facteurs apparaissant parfois en utilisant l'identité (IR3). On calcule ainsi

$$\begin{aligned} A_4 &= (2x - 5)(2x + 5)(x + 2) - (x - 2)(x + 2)(2x + 5) + 5(x + 2)(2x + 5) \\ &= (2x + 5)(x + 2)((2x - 5) - (x - 2) + 5) \\ &= (2x + 5)(x + 2)^2 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16

- Le réel 1 est un point d'annulation de l'expression $x^2 - 3x + 2$. Comme le produit des deux points d'annulation de cette expression est 2, on sait que l'autre point d'annulation est 2. Autrement dit, sans aucun calcul, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Le dénominateur de A se factorise directement en utilisant l'identité remarquable (IR3). Finalement,

$$A = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 2}{x + 1}$$

- Avant de mettre les deux termes de B au même dénominateur, il est important de chercher un dénominateur commun le plus simple possible. Or le facteur $x - 1$ apparaît dans les deux dénominateurs en question. On écrit donc

$$B = \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(x + 1)(x + 5)} - \frac{2(x + 5)}{(x - 1)(x + 1)(x + 5)} = \frac{(x + 1)^2 - 2(x + 5)}{(x - 1)(x + 1)(x + 5)} = \frac{x^2 - 9}{(x - 1)(x + 1)(x + 5)}$$

On factorise alors le numérateur de B avec l'identité (IR3) et on obtient $B = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 1)(x + 1)(x + 5)}$.

Correction de l'exercice 17

- On peut espérer trouver une écriture plus simple en regroupant les puissances de chaque facteur numérique. C'est clair pour la première expression qui n'est formée que de puissances de 10. C'est assez raisonnable pour la seconde qui n'est formée que de produits et quotients. En premier lieu, on traite directement la première expression à l'aide de (P1) et (P2).

$$\frac{10^{-9} \times 10^4}{(10^{-3})^2} = \frac{10^{-9} \times 10^4}{10^{-6}} = 10$$

Tous les nombres apparaissant dans la deuxième expression peuvent se décomposer à l'aide des facteurs 2 et 3. On commence par séparer les facteurs à l'aide de (P3) pour regrouper ensuite les puissances d'un même facteur à l'aide de (P1) et (P2). Plus précisément

$$\begin{aligned} \frac{(-6)^{3n+2} \times 12^n}{2^n \times (-9)^n} &= \frac{((-1) \times 2 \times 3)^{3n+2} \times (2^2 \times 3)^n}{2^n \times ((-1) \times 3^2)^n} = \frac{(-1)^{3n+2} \times 2^{3n+2} \times 3^{3n+2} \times 2^{2n} \times 3^n}{2^n \times (-1)^n \times 3^{2n}} \\ \text{donc } \frac{(-6)^{3n+2} \times 12^n}{2^n \times (-9)^n} &= (-1)^{2n+2} \times 2^{4n+2} \times 3^{2n+2} \end{aligned}$$

Le premier facteur du produit est 1 puisque $2n + 2$ est pair. Les autres facteurs peuvent être laissés sous la forme obtenue. On peut aussi noter que pour tout complexe x , $x^{2n} = (x^2)^n$ ce qui permet de réécrire notre expression sous la forme

$$\frac{(-6)^{3n+2} \times 12^n}{2^n \times (-9)^n} = 4^{2n+1} \times 9^{n+1}$$

Mais est-ce plus simple? On peut aussi essayer de regrouper toutes les puissances n , ce que l'on peut faire de plusieurs manières. Mais encore une fois, est-ce plus simple? Vous pourrez réétudier les commentaires des exercices 2 et 6 pour comprendre que le mot «simple» n'a pas beaucoup de sens en dehors de tout contexte. Ceci étant, vous pourrez montrer à l'aide de manipulations analogues à celles déjà menées que

$$\frac{(-6)^{3n+2} \times 12^n}{2^n \times (-9)^n} = 36 \times 144^n \quad \text{et} \quad \frac{(-6)^{3n+2} \times 12^n}{2^n \times (-9)^n} = \frac{1}{4} \times 144^{n+1}$$

Correction de l'exercice 18

- On gère A par un calcul «brutal».

$$A = \frac{(2a+1)(a-1) + (2a+1)(a+1) - 2(a+1)(a-1)}{(a+1)(a-1)(2a+1)}$$

Au sens propre du terme, on a répondu à la question. Développer le dénominateur de A est vain tant que l'on ne sait pas sous quelle forme A sera utile. En revanche, laisser le numérateur de A sous la forme précédente est à proscrire. Il est plus que vraisemblable que la forme développée soit simple. On poursuit donc le calcul

$$A = \frac{2(a^2 + a + 1)}{(a+1)(a-1)(2a+1)}$$

Factoriser le numérateur de A est possible dans $\mathbb{C}$. Mais cela fait apparaître des complexes non réels dont l'écriture algébrique utilise $\sqrt{3}$. Ce n'est pas raisonnable sauf si l'usage que l'on va faire de A l'exige. Comme on ne fait rien de plus avec A , la forme obtenue est bien suffisamment simple.

- Notons avant tout que le premier terme et le dernier terme de B ont un dénominateur commun très simple puisque $2a-2 = -2(1-a)$. On peut donc écrire

$$B = \frac{-2(2a-1) + 4(a-1) - (2a-1)}{2(a-1)(2a-1)} = \frac{-2a-1}{2(a-1)(2a-1)}$$

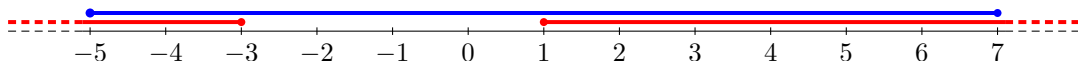
La forme obtenue est bien assez simple. On peut aussi limiter la présence du signe $-$ en écrivant par exemple

$$B = -\frac{2a+1}{2(a-1)(2a-1)} \quad \text{ou} \quad B = \frac{2a+1}{2(1-a)(2a-1)}$$

Correction de l'exercice 19

Dans cet exercice, on raisonne par équivalences. Les différentes égalités écrites sont liées par la locution «si et seulement si». Deux égalités ainsi liées ont des valeurs logiques inconnues mais identiques; elles peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses.

- Un réel x vérifie $|x-1| > 2$ si et seulement si $x-1 > 2$ ou $x-1 < -2$ si et seulement si $x > 3$ ou $x < -1$. L'ensemble des réels x vérifiant $|x-1| > 2$ est donc $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.
- Un réel x vérifie $|x+2| \leq 3$ si et seulement si $x+2 \leq 3$ et $x+2 \geq -3$ si et seulement si $x \leq 1$ et $x \geq -5$. L'ensemble des réels x vérifiant $|x+2| \leq 3$ est donc $[-5; 1]$.
- Procédons comme l'indication le propose, en effectuant une intersection de manière graphique. Un réel x vérifie $|x+1| \geq 2$ si et seulement si $x+1 \geq 2$ ou $x+1 \leq -2$ si et seulement si $x \geq 1$ ou $x \leq -3$. L'ensemble des réels x vérifiant $|x+1| \geq 2$ est donc $]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$, que l'on a représenté en rouge sur le schéma qui suit. Un réel x vérifie $|x-1| \leq 6$ si et seulement si $x-1 \leq 6$ et $x-1 \geq -6$ si et seulement si $x \leq 7$ et $x \geq -5$. L'ensemble des réels x vérifiant $|x-1| \leq 6$ est donc $[-5; 7]$, que l'on a représenté en bleu sur le schéma qui suit.



L'ensemble des réels cherché est l'intersection des deux ensembles déterminés, c'est à dire l'ensemble des réels appartenant à la fois aux zones bleue et rouge. La lecture du schéma précédent assure que cet ensemble est $[-3; 1]$.

Correction de l'exercice 20

- Soit x un réel. L'assertion $|x-1| \leq 3$ est équivalente à l'appartenance de x à l'intervalle fermé borné centré en 1 et tel que la distance entre 1 et une de ses extrémités soit 3, autrement dit à l'intervalle $[1-3; 1+3]$. Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq 3$ si et seulement si $x \in [-2; 4]$.
- L'intervalle fermé borné $[7; 9]$ est centré en $(7+9)/2$, c'est à dire 8. De plus la distance entre son centre et une de ses bornes est $|9-8|$ soit 1. En réutilisant l'équivalence citée dans la première question on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-8| \leq 1$ si et seulement si $x \in [7; 9]$.
- On opère de la même manière que dans la question précédente en notant que les intervalles manipulés sont ouverts puisque les inégalités sont strictes. On obtient le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x+1,30| < 0,01$ si et seulement si $x \in]-1,31; -1,29[$. Notez que l'on a écrit le point central de l'intervalle $-1,30$ et pas $-1,3$ car on travaille a priori avec une précision de 10^{-2} vu les données du problème.
- Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Le cours assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-1| \leq a$ alors $x \geq 1-a$. Pour compléter l'assertion proposée, il suffit donc de choisir un réel a tel que $1-a \geq 0,8$, c'est à dire $a \leq 0,2$. Comme le précise l'énoncé, on a en effet une infinité de solutions et on peut proposer de compléter l'assertion sous la forme: pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-1| \leq 0,2$ alors $x \geq 0,8$.

Correction de l'exercice 21

1. Pour tout réel x appartenant à $[-3/2; +\infty[$, $\sqrt{2x+3} = \sqrt{2}\sqrt{x + \frac{3}{2}}$.
2. Pour tout réel x appartenant à $[-3/2; +\infty[$, $\sqrt{2x+3} = \sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{2x}{3}}$.
3. Pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}^*$, $\sqrt{x^4+4} = \sqrt{x^4}\sqrt{1 + \frac{4}{x^4}} = x^2\sqrt{1 + \frac{4}{x^4}}$.

Je rappelle qu'en toute généralité, pour tout réel a , $\sqrt{a^2} = |a|$. Dans notre cas, comme le carré d'un réel est toujours positif, je n'ai pas fait figurer les valeurs absolues autour du facteur x^2 .

Correction de l'exercice 22

- Pour simplifier A , il faut réécrire chaque racine carrée en en extrayant les facteurs qui sont des carrés.

$$\begin{aligned}\sqrt{20} &= \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \\ \text{et} \quad \sqrt{45} &= \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \\ \text{donc} \quad A &= 2 \times 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2 \times 3\sqrt{5} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

- La simplification de B fait uniquement appel à la notion de «quantité conjuguée» comme dans l'exemple du cours.

$$B = \frac{(\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)} = \frac{13+9\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2-3^2} = -(13+9\sqrt{2})$$

- Comme les dénominateurs des termes de C sont conjugués, la mise au même dénominateur doit directement donner une fraction sans racine carrée au dénominateur. Il est donc plus que maladroit de chasser les racines carrées des dénominateurs avant de faire la somme. En règle générale, l'opération qui consiste à chasser les racines carrées du dénominateur d'une fraction est la dernière opération que l'on effectue. Il arrive même souvent qu'on ne chasse pas les racines carrées des dénominateurs!

$$C = \frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = 6\sqrt{3}$$

Correction de l'exercice 23

- L'usage direct de la notion de «quantité conjuguée» permet d'écrire

$$A = \frac{\sqrt{x+1}+2}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{\sqrt{x+1}+2}{(\sqrt{x+1})^2-2^2} = \frac{\sqrt{x+1}+2}{x-3}$$

Le caractère plus simple de la forme obtenue est très discutable mais aucune racine carrée ne devait apparaître dans le dénominateur de A .

- Comme le numérateur et le dénominateur de B sont conjugués, il est naturel de penser que chasser les racines carrées du dénominateur de B va simplifier l'écriture de l'expression. En pratique, on obtient

$$B = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x+1}^2 + \sqrt{x-1}^2 - 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2} = \frac{2x - 2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{(x+1) - (x-1)}$$

Finalement $B = x - \sqrt{x^2-1}$, ce qui est en effet bien plus simple. Le développement de l'argument de la racine carrée est facultatif. Rien ne dit que c'est un bon plan lorsque l'on sera amené à manipuler B .

- En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, on voit que le dénominateur de C est un carré parfait. On peut alors obtenir rapidement une expression très simple de C .

$$C = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1$$

Correction de l'exercice 24

- Soit $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. Le calcul est laborieux mais sans difficulté puisqu'il ne s'agit que de développer.

$$\begin{aligned}& (xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2 - (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \\ &= ((xx')^2 + (yy')^2 + 2(xx')(yy')) + ((xy')^2 + (x'y)^2 - 2(xy')(x'y)) - (x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2) \\ &= (xx')^2 + (yy')^2 + 2xx'yy' + (xy')^2 + (x'y)^2 - 2xx'yy' - ((xx')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2 + (yy')^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$.

Correction de l'exercice 25

- Soit $x \in [0; 1]$. La technique de base consiste à placer tous les termes de l'identité du même côté du signe $\leq$ puis de chercher le signe de l'expression apparaissant en la factorisant. Ici, on reconnaît un carré parfait. En effet

$$\frac{1}{4} - x(1-x) = \frac{1}{4} - x + x^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

Le carré d'un réel étant positif, on sait que $\frac{1}{4} - x(1-x) \geq 0$. Finalement, pour tout $x \in [0; 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 26

- Soit $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. La technique de base consiste à placer tous les termes de l'identité du même côté du signe $\leq$ puis de chercher le signe de l'expression apparaissant par exemple en la factorisant. Aucune identité connue n'apparaissant lors du regroupement des termes de l'identité, on commence par développer l'expression obtenue. On reconnaît alors un carré parfait, ce qui permet de conclure.

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')^2 \\ &= (xx')^2 + (xy')^2 + (yx')^2 + (yy')^2 - ((xx')^2 + (yy')^2 + 2xx'yy') \\ &= (xy')^2 + (yx')^2 - 2(xy')(x'y) \\ &= (xy' - yx')^2 \end{aligned}$$

Comme le carré d'un réel est positif, on a montré que $(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \geq (xx' + yy')^2$. Finalement, pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(xy + x'y')^2 \leq (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$. Vous pourrez remarquer que l'identité de l'exercice 24 permet de conclure directement; sa preuve réapparaît d'ailleurs dans le calcul qui précède.

- Soit $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6$. On travaille comme pour établir la première expression, les calculs étant en revanche beaucoup plus laborieux, en particulier pour repérer des carrés parfaits. Notez seulement que pour développer le carré de manière efficace, on pourra lire ou relire la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8.

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xy + x'y' + zz')^2 \\ &= (xx')^2 + (xy')^2 + (xz')^2 + (yx')^2 + (yy')^2 + (yz')^2 + (zx')^2 + (zy')^2 + (zz')^2 \\ &\quad - ((xx')^2 + (yy')^2 + (zz')^2 + 2(xx')(yy') + 2(xx')(zz') + 2(yy')(zz')) \\ &= (xy')^2 + (yx')^2 - 2(xy')(yx') + (xz')^2 + (x'z)^2 - 2(xz')(x'z) + (yz')^2 + (y'z)^2 - 2(yz')(y'z) \\ &= (xy' - yx')^2 + (xz' - x'z)^2 + (yz' - y'z)^2 \end{aligned}$$

Comme le carré d'un réel est positif, on a montré que $(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) \geq (xy + x'y' + zz')^2$. Finalement, pour tout $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6$, $(xy + x'y' + zz')^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)$.

Correction de l'exercice 27

Dans tous les calculs, on développe les dénominateurs comme l'énoncé l'exige.

- On note que $A = \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x+1}$.

en multipliant numérateur et dénominateur du premier terme de A par 2. Avec ce premier calcul, on se débarrasse des fractions. De plus, après cette transformation, le premier et le dernier terme formant A ont le même dénominateur, ce qui permet de les ajouter directement. On obtient alors

$$A = \frac{2x}{2x+1} - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 3(2x+1)}{x(2x+1)} = \frac{2x^2 - 6x - 3}{x(2x+1)} = \frac{2x^2 - 6x - 3}{2x^2 + x}$$

- On note que dans les deux dénominateurs des termes du numérateur de B , on peut mettre 2 en facteur. Il s'ensuit que l'on choisit $x(2+4x)$ plutôt que $2x(2+4x)$ comme dénominateur commun pour ces termes.

$$B = \frac{\frac{3x}{x(2+4x)} - \frac{1+2x}{x(2+4x)}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3x - (1+2x)}{x(2+4x)}}{\frac{x^2 - 1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x(2+4x)}}{\frac{x^2 - 1}{x}} = \frac{x-1}{x(2+4x)} \times \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x+1)(2+4x)} = \frac{1}{4x^2 + 6x + 2}$$

en remarquant que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et en simplifiant donc par $x(x-1)$.

- Gérons le cas de C par étapes. On note que $5 + \frac{2}{x} = \frac{5x+2}{x}$.

$$\text{donc } 2 - \frac{3}{5 + \frac{2}{x}} = 2 - 3 \times \frac{x}{5x+2} = \frac{2(5x+2) - 3x}{5x+2} = \frac{7x+4}{5x+2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2 - \frac{3}{5 + \frac{2}{x}}} = \frac{5x+2}{7x+4}$$

$$\text{donc } C = \frac{5x+2}{7x+4} - \frac{1}{x+1} = \frac{(5x+2)(x+1) - (7x+4)}{(7x+4)(x+1)} = \frac{5x^2-2}{7x^2+11x+4}$$

Le numérateur de C est élémentaire à factoriser puisque c'est la différence de deux carrés, à savoir $(\sqrt{5}x)^2$ et $(\sqrt{2})^2$ mais cette opération est interdite par l'énoncé et fait apparaître des racines carrées; ce n'est peut-être pas astucieux.

Correction de l'exercice 28

- On note que $5^{2n} = (5^n)^2$ et $4^n = 2^{2n} = (2^n)^2$. Le numérateur de A apparaît donc comme la différence de deux carrés et l'identité remarquable (IR3) assure que

$$A = \frac{(5^n)^2 - (2^n)^2}{5^n - 2^n} = \frac{(5^n - 2^n)(5^n + 2^n)}{5^n - 2^n} = 5^n + 2^n$$

- On note que

$$\sqrt{12^n} = \sqrt{(4 \times 3)^n} = \sqrt{4^n \times 3^n} = \sqrt{4^n} \sqrt{3^n} = (\sqrt{4})^n \sqrt{3^n} = 2^n \sqrt{3^n}.$$

$$\text{et } (\sqrt{6})^n = \sqrt{6^n} = \sqrt{(2 \times 3)^n} = \sqrt{2^n \times 3^n} = \sqrt{2^n} \sqrt{3^n}$$

$$\text{donc } B = \frac{2^n(1 + \sqrt{3^n})}{\sqrt{2^n} \sqrt{3^n}} = \sqrt{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{3^n}} + 1 \right)$$

Cette expression est plus simple que la précédente, au sens où on a supprimé des facteurs communs. Vous pourrez chercher dans le cours les références exactes des propriétés utilisées lors de chaque transformation. Je vous rappelle que cette activité est très formatrice, vous imposant d'appliquer rigoureusement des résultats connus plutôt que d'imaginer des calculs plus ou moins fous.

Correction de l'exercice 29

- Pour simplifier A et B , il suffit d'écrire l'argument de l'exponentielle mise en jeu sous la forme d'un logarithme puis d'utiliser la formule (LE2). Ainsi,

- Comme $-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $A = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}$.

- Comme $\frac{\ln(x)}{2} = \ln(\sqrt{x})$, $B = e^{\ln(\sqrt{x})} = \sqrt{x}$.

- Le cas de C est un peu plus complexe. Dans l'expression $-x + \ln(x) - 2\ln(y)$, le premier terme n'est pas un logarithme, sauf à l'écrire $\ln(e^{-x})$ ce qui est assez artificiel. On utilise plutôt la formule (ER1) pour séparer dans l'exponentielle les arguments qui sont des logarithmes et ceux qui ne le sont pas pour ensuite simplifier. Les fonctions logarithme et exponentielle étant «réciproques» l'une de l'autre, on peut mener le calcul de plusieurs manières en s'appuyant plutôt sur les propriétés du logarithme ou plutôt sur celles de l'exponentielle. Par exemple,

$$\begin{aligned} e^{-x+\ln(x)-2\ln(y)} &= e^{-x} e^{\ln(x)} e^{-2\ln(y)} && \text{Usage de (ER1)} \\ &= \frac{e^{\ln(x)}}{e^x (e^{\ln(y)})^2} && \text{Usage de (ER2)} \\ &= \frac{x}{e^x y^2} && \text{Usage de (LE2)} \end{aligned}$$

On peut préférer la version suivante

$$\begin{aligned} e^{-x+\ln(x)-2\ln(y)} &= e^{-x} e^{\ln(x)-\ln(y^2)} && \text{Usage de (ER1) et (LN1)} \\ &= e^{-x} e^{\ln(x/y^2)} && \text{Usage de (LN2)} \\ &= \frac{x e^{-x}}{y^2} && \text{Usage de (LE2)} \end{aligned}$$

Que l'on place l'exponentielle restante au numérateur ou au dénominateur de l'expression finale est une question de goût. On ne peut pas dire qu'une des deux écritures soit réellement plus simple que l'autre.

- Le cas de D est très semblable à celui de B . Sans plus de commentaire,

$$D = \exp\left(\frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}\right) = \exp\left(\frac{\ln(xy)}{2}\right) = \exp(\ln(\sqrt{xy})) = \sqrt{xy}$$

Correction de l'exercice 30

- Pour simplifier les expressions, il suffit d'écrire l'argument du logarithme mis en jeu sous la forme d'une exponentielle puis d'utiliser la formule (LE1). Ainsi, en mettant en valeur les formules utilisées,

$$\begin{array}{l|l} \ln(2e^x) = \ln(2) + \ln(e^x) & \text{Usage de (LN1)} \\ = \ln(2) + x & \text{Usage de (LE1)} \end{array}$$

En suivant les mêmes idées, on peut simplifier B .

$$\begin{array}{l|l} \ln(\sqrt{e^x}) = \ln(e^{x/2}) & \text{Usage de (ER3)} \\ = \frac{x}{2} & \text{Usage de (LE1)} \end{array}$$

Comme dans l'exercice précédent, les fonctions logarithme et exponentielle étant «réciproques» l'une de l'autre, on peut mener le calcul de plusieurs manières. On peut ainsi préférer les transformations suivantes.

$$\begin{array}{l|l} \ln(\sqrt{e^x}) = \frac{\ln(e^x)}{2} & \text{Usage de (LN3)} \\ = \frac{x}{2} & \text{Usage de (LE1)} \end{array}$$

Correction de l'exercice 31

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x)^2 - g(x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} = e^x e^{-x}$$

donc $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$

en notant que $e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$. Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$. Notez le mode de rédaction d'une identité. On fixe un réel x ; on démontre une relation en utilisant ce réel fixé de manière arbitraire; on peut alors conclure au fait que la relation prouvée est valable **pour tout** réel x . Vous pourrez aller relire la leçon sur l'établissement d'identités pour relire d'autres exemples de telles rédactions.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour montrer la deuxième identité, plusieurs points de départ semblent possibles. Par exemple

- On peut développer $2f(x)^2 - 1 - f(2x)$ et obtenir 0.
- On peut développer $2f(x)^2 - 1$ et obtenir $f(2x)$.
- On peut transformer $f(2x) - 1$ pour obtenir $2f(x)^2$.

Notez que l'on peut anticiper la difficulté des calculs avant de les faire. Il faut en effet toujours privilégier les développements qui sont systématiques aux factorisations plus délicates à deviner. Dans notre exemple, si on choisit la troisième idée, on doit obtenir $2f(x) \times f(x)$ qui est un produit donc le résultat d'une factorisation. C'est a priori une mauvaise idée. En revanche les deux premières idées permettent d'aboutir sans difficulté. La première est la mise en place de l'idée de base: on place tous les termes de l'identité d'un même côté du signe $=$ pour tout développer et obtenir 0. Cette technique n'est qu'un pis-aller, pas toujours optimal du point de vue des calculs. Mettons donc en œuvre la deuxième idée. En utilisant (ER1) pour écrire la quatrième égalité, on calcule

$$2f(x)^2 - 1 = 2 \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{2} - 1 = \frac{e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} - 2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

donc $2f(x)^2 - 1 = f(2x)$

Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. En reprenant les remarques de la question précédente, on note que transformer $g(2x)$ pour obtenir le produit $2f(x) \times g(x)$ est une mauvaise idée car cette transformation est une factorisation. Le point de départ de notre calcul est donc le produit $2f(x) \times g(x)$, que l'on va développer. Plus précisément, en utilisant (IR3) pour écrire la troisième égalité et (ER1) pour écrire la quatrième égalité, on calcule

$$2f(x)g(x) = 2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

donc $2f(x)g(x) = g(2x)$

Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = 2f(x)g(x)$.

Correction de l'exercice 32

- Pour tout réel x , $e^{2x} + 1 = e^{x+x} + e^{x-x} = e^x e^x + e^x e^{-x} = e^x \times (e^x + e^{-x})$

2. Pour tout réel x , $\frac{e^x + 1}{e^{2x} + 2} = \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^{2x}(1 + 2e^{-2x})} = \frac{e^x}{e^{2x}} \times \frac{1 + e^{-x}}{1 + 2e^{-2x}} = e^{-x} \times \frac{1 + e^{-x}}{1 + 2e^{-2x}}$

3. Pour tout réel x , $\sqrt{e^x + 3} = \sqrt{e^x(1 + 3e^{-x})} = \sqrt{e^x} \sqrt{1 + 3e^{-x}} = e^{x/2} \sqrt{1 + 3e^{-x}}$

Correction de l'exercice 33

- L'identité (IR1) permet de calculer le carré du nombre introduit. La formule (R1) permet alors de regrouper les deux racines. L'identité (IR3) permet enfin de simplifier ce qui se trouve sous le radical; Le fait que les deux arguments des racines carrées de départ étaient conjugués assurait à l'avance que tout devait se simplifier. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} (\sqrt{7 - \sqrt{5}} + \sqrt{7 + \sqrt{5}})^2 &= (7 - \sqrt{5}) + (7 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{7 - \sqrt{5}} \times \sqrt{7 + \sqrt{5}} \\ &= 14 + 2\sqrt{(7 - \sqrt{5})(7 + \sqrt{5})} \\ &= 14 + 2\sqrt{7^2 - \sqrt{5}^2} \\ &= 14 + 2\sqrt{44} \\ &= 14 + 4\sqrt{11} \end{aligned}$$

N'oubliez pas la dernière étape qui consiste à simplifier au plus les entiers apparaissant sous les radicaux. Comme tous les nombres manipulés sont positifs, on en déduit

$$\sqrt{7 - \sqrt{5}} + \sqrt{7 + \sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{7 - \sqrt{5}} + \sqrt{7 + \sqrt{5}})^2} = \sqrt{14 + 4\sqrt{11}}$$

Ne pas oublier de vérifier que $\sqrt{7 - \sqrt{5}} + \sqrt{7 + \sqrt{5}} \geq 0$ avant ce dernier calcul. Je rappelle en effet que lorsque x est un réel quelconque, la racine carrée de x^2 est la valeur absolue de x donc n'est pas toujours égale à x .

Correction de l'exercice 34

- En écrivant les facteurs numériques de chaque terme sous forme d'un carré, on reconnaît dans A l'identité remarquable (IR3). Dans notre cas ces facteurs sont des carrés d'entiers, ce qui facilite la tâche.

$$A = (3(x - 2))^2 - (5(3 - x))^2 = (3(x - 2) - 5(3 - x))(3(x - 2) + 5(3 - x)) = (8x - 21)(9 - 2x)$$

Insistons sur le fait que manipuler les entiers 9 et 25 qui sont des carrés parfait n'a servi qu'à simplifier notre travail. On peut manipuler tout réel positif, voir tout réel quelconque si on travaille dans $\mathbb{C}$. Par exemple, si x est un complexe quelconque

$$\begin{aligned} \bullet 2(x - 1)^2 - 3(x + 1)^2 &= (\sqrt{2}(x - 1))^2 - (\sqrt{3}(x + 1))^2 \\ &= (\sqrt{2}(x - 1) - \sqrt{3}(x + 1))(\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{3}(x + 1)) \\ &= ((\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{2} - \sqrt{3})((\sqrt{2} + \sqrt{3})x - \sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ \bullet 2(x - 1)^2 + 4(x + 2)^2 &= (\sqrt{2}(x - 1))^2 - (2i(x + 2))^2 \\ &= (\sqrt{2}(x - 1) - 2i(x + 2))(\sqrt{2}(x - 1) + 2i(x + 2)) \\ &= ((\sqrt{2} - 2i)x - \sqrt{2} - 4i)((\sqrt{2} + 2i)x - \sqrt{2} + 4i) \end{aligned}$$

- Pour factoriser B , il faut repérer l'expression $x - 2$ dans tous les termes, en regroupant avant les termes x^2 et $4(1 - x)$ sous la forme $x^2 - 4x + 4$ qui est le carré de $x - 2$. En utilisant les identités (IR2) et (IR3), on peut ainsi écrire

$$B = (x - 2)^2 + 5(x - 2)(x + 2) - 3(x - 2)(x + 3) = (x - 2)((x - 2) + 5(x + 2) - 3(x + 3)) = (x - 2)(3x - 1)$$

Correction de l'exercice 35

- La première mise sous forme canonique est standard $A = 3(x^2 + 2x - 1) = 3((x + 1)^2 - 2)$.
- Pour la transformation de B , noter que $4 = 2^2$ permet de ne mettre que -1 en facteur pour reconnaître le début d'un carré. On obtient ainsi

$$B = -((2x)^2 + 5x - 1) = -\left(\left(2x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1\right) = \frac{41}{16} - \left(2x + \frac{5}{4}\right)^2$$

Laisser -1 en facteur n'apporte rien. On aurait même pu se passer de le mettre en facteur mais la forme usuelle est alors moins facile à repérer.

1. On note que $x + 1 \leq y + 1$ donc, sachant que l'exponentielle est croissante $e^{x+1} \leq e^{y+1}$.
 - Comme l'exponentielle est croissante $e^x \leq e^y$. Il reste à multiplier cette inégalité par x , ce que l'on ne sait pas faire en général. Il faut discuter suivant le signe de x donc distinguer deux cas.
 - Si $x \geq 0$, $xe^x \leq xe^y$.
 - Si $x \leq 0$, $xe^y \leq xe^x$.
 - Il aurait paru plus naturel de classer xe^x et ye^y , en conservant ainsi une certaine «symétrie» dans l'énoncé. Malheureusement, multiplier des inégalités conduit à des résultats parfois incorrects, sauf lorsqu'elles ne mettent en jeu que des grandeurs positives. On peut traiter quelques cas à l'aide des connaissances de base sur les inégalités rappelées dans la leçon du jour.
 - Si $x \geq 0$, alors $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq e^x \leq e^y$ donc $xe^x \leq ye^y$.
 - Si $x \leq 0 \leq y$, alors xe^x est un réel négatif et ye^y est un réel positif puisque l'exponentielle ne prend que des valeurs positives. On en déduit qu'en particulier $xe^x \leq ye^y$.

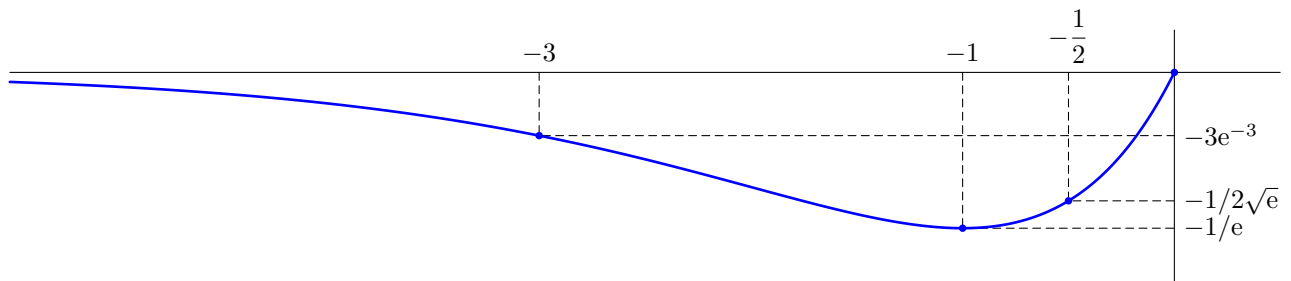
Il reste le cas où x et y sont négatifs, qui ne peut pas être traité avec les rappels de cette leçon. En revanche, on peut mettre en œuvre les mêmes idées que celle de la leçon : la connaissance des variations de la fonction

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & te^t \end{array}$$

doit permettre de classer les images des réels x et y . Comme f n'est pas une fonction usuelle, ses variations ne sont pas connues a priori. Mais vous avez appris en terminale comment étudier les variations d'une fonction. Dans notre cas, on note que f est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = (t+1)e^t$. On remarque alors que f' ne prend que des valeurs négatives sur $]-\infty; -1]$ donc que f est décroissante sur cet intervalle. On montre de même que f est croissante sur $[-1; +\infty[$. Les variations de f étant connues, on note que notre critère de discussion précédent est maladroit. Le réel 0 ne joue aucun rôle et il vaut mieux discuter suivant la position relative de x et y par rapport à -1 . Ainsi

- Si $x \geq -1$, alors $-1 \leq x \leq y$ donc $xe^x \leq ye^y$ puisque f est croissante sur $[-1; +\infty[$.
- Si $y \leq -1$, alors $x \leq y \leq -1$ donc $ye^y \leq xe^x$ puisque f est décroissante sur $]-\infty; -1]$.

Il reste à traiter le cas où $x < -1 < y$. Pour nous aider à étudier ce cas, on peut tracer le graphe de la fonction f sur $[-5; 0]$. Sur le schéma qui suit, le repère choisi n'est pas orthonormé afin de tenir compte du fait que f ne prend que des valeurs comprise entre 0 son minimum $-e^{-1}$, qui est de l'ordre de 0,37 donc petit.



À l'aide du graphe, on réalise que l'on ne peut pas prévoir le classement des images par f de réels situés de part et d'autre de -1 . Par exemple $-3 \leq 0$ et $f(-3) \leq 0$, mais $-3 \leq -\frac{1}{2}$ et $f(-3) \geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. Comme le logarithme et $x \mapsto x^3$ sont croissantes, on peut écrire successivement $\ln(x) \leq \ln(y)$ puis $(\ln(x))^3 \leq (\ln(y))^3$.
 - Comme la fonction racine carrée est croissante et comme $x + 1 \leq y + 1$, on sait que $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$. Notons que les grandeurs apparaissant dans cet encadrement sont positives. Comme $0 \leq x \leq y$, on peut multiplier les inégalités entre elles et obtenir finalement $x\sqrt{x+1} \leq y\sqrt{y+1}$.
3. Un réel non nul et son inverse ont même signe. On sait donc que $\frac{1}{x} < 0$ et $\frac{1}{y} > 0$. En particulier $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$.
 - Comme la fonction exponentielle est croissante, $e^{3x} \leq e^{3y}$. Comme $x < 0$, on en déduit que $xe^{3x} \geq xe^{3y}$. Finalement $xe^{3x} + 1 \geq xe^{3y} + 1$.
 - Comme une exponentielle est positive et comme $x < 0$, on sait que $xe^{3x} < 0$ donc que $xe^{3x} + 1 < 1$. Comme $y > 0$, la même propriété de l'exponentielle assure que $ye^{3y} + 1 > 1$. En particulier $xe^{3x} + 1 \leq ye^{3y} + 1$.

Correction de l'exercice 37

1. L'encadrement de x^2 pose un problème car la fonction $x \mapsto x^2$ ne se comporte pas du tout de la même manière sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$. Or la contrainte donnée sur x ne permet pas de connaître son signe. On distingue donc deux cas.

- Si $0 \leq x \leq 2$ alors $x^2 \leq 2^2$ puisque $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire $x^2 \leq 4$.
- Si $-1 \leq x \leq 0$ alors $x^2 \leq (-1)^2$ puisque $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, c'est à dire $x^2 \leq 1$. En particulier si $-1 \leq x \leq 0$ alors $x^2 \leq 4$; on perd ici des informations afin de pouvoir regrouper les résultats des deux études.

Finalement, comme le carré d'un réel est positif, on a montré que $0 \leq x^2 \leq 4$. Comme $-2 \leq -x \leq 1$, on en déduit que $2 \times 0 - 2 + 2 \leq x^2 - x + 2 \leq 2 \times 4 + 1 + 2$ soit $0 \leq A \leq 11$. Faites bien attention à ajouter des inégalités dans cette dernière étape. La «soustraction» d'inégalités, même si elle est tentante, peut conduire à des résultats incorrects. Considérons par exemple un réel x appartenant à $[1; 2]$. On note que

$$\begin{cases} 2 \leq 2x \leq 4 \\ 1 \leq x^2 \leq 4 \end{cases}$$

Si on s'autorise à «soustraire» ces deux inégalités, on obtient $1 \leq 2x - x^2 \leq 0$. Comme $1 > 0$, le résultat précédent est faux. De manière encore plus patente, si on choisit $x = \frac{1}{2}$, on a écrit $1 \leq \frac{3}{4} \leq 0$, ce qui est clairement faux.

2. On note que $A = 2 \left(x^2 - \frac{x}{2} + 1 \right) = 2 \left(\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} + 1 \right) = 2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{8}$

- On travaille comme dans la première question en distinguant deux cas pour gérer le carré. Notons que $-\frac{5}{4} \leq x - \frac{1}{4} \leq \frac{7}{4}$.

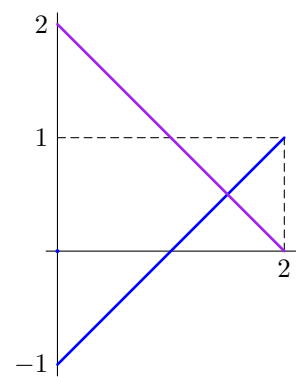
- Si $0 \leq x - \frac{1}{4}$ alors $\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \left(\frac{7}{4} \right)^2$ puisque $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire $\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{49}{16}$.
- Si $x - \frac{1}{4} \leq 0$ alors $\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \left(-\frac{5}{4} \right)^2$ puisque $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, c'est à dire $\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{25}{16}$. En particulier $\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{49}{16}$; on perd ici encore des informations afin de pouvoir regrouper les résultats des deux études.

Finalement, comme le carré d'un réel est positif, on a montré que $0 \leq \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{49}{16}$. La nouvelle forme de A n'induit que des manipulations basiques sur les inégalités: multiplication par un nombre positif et ajout d'un nombre. On peut donc directement écrire $2 \times 0 + \frac{15}{8} \leq 2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{8} \leq 2 \times \frac{49}{16} + \frac{15}{8}$, c'est à dire $\frac{15}{8} \leq A \leq 8$.

- L'estimation obtenue est bien meilleure. On pouvait s'en douter. En effet, majorer la somme de deux expressions par la somme d'un majorant de la première expression et d'un majorant de la deuxième expression est souvent une mauvaise opération du point de vue de la précision; on ne tient pas compte du fait que les valeurs extrémales des expressions manipulées ne sont pas atteintes au même point. Donnons un exemple simple de ce phénomène. On considère deux fonctions

$$\begin{array}{lll} A : [0; 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} B : [0; 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2 - x \end{array}$$

Le graphe de ces fonctions est représenté ci-contre, celui de A étant bleu et celui de B étant violet. Le meilleur majorant de A est clairement 1. Le meilleur majorant de B est clairement 2. On peut donc assurer que pour tout $x \in [0; 2]$, $A(x) + B(x) \leq 2 + 1$. Ceci étant, l'estimation est mauvaise puisque la fonction $x \mapsto A(x) + B(x)$ ne prend que la valeur 1 donc est clairement majorée par 1. En majorant séparément les termes de la somme $A + B$, on n'a pas pu tenir compte du fait que lorsque A est maximale alors B est minimale et que lorsque B est maximale, A est minimale.



Correction de l'exercice 38

1. Comme $1 \leq x \leq 3$, $2 \times 1 + 1 \leq 2x + 1 \leq 2 \times 3 + 1$ soit $3 \leq 2x + 1 \leq 7$. Comme les trois nombres apparaissant dans ce dernier encadrement sont strictement positifs puisque supérieurs ou égaux à 3, la décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ assure que

$$\frac{1}{7} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$$

Or $5 \leq 4x + 1 \leq 13$, en travaillant comme pour établir le premier encadrement

donc $\frac{5}{7} \leq \frac{4x+1}{2x+1} \leq \frac{13}{3}$, puisque tous les nombres manipulés sont positifs.

donc $\frac{5}{7} \leq A \leq \frac{13}{3}$.

La tentation est grande de «diviser» les encadrements $5 \leq 4x + 1 \leq 13$ par $3 \leq 2x + 1 \leq 7$ pour obtenir que A appartient à $[5/3; 13/7]$; c'est d'autant plus tentant que le résultat est plus précis, et est même correct comme on va le voir dans la deuxième question. Mais cette manipulation est interdite: on ne peut pas «diviser» des inégalités, même lorsqu'elles ne mettent en jeu que des réels strictement positifs car le résultat obtenu peut parfaitement être erroné. Considérons par exemple un réel x appartenant à $[1; 3]$. On note que

$$\begin{cases} 5 \leq 4x + 1 \leq 13 \\ 1 \leq 2x - 1 \leq 5 \end{cases}$$

Si on s'autorise à «diviser» ces deux inégalités, qui ne mettent bien en jeu que des nombres strictement positifs, on obtient

$$\frac{5}{1} \leq \frac{4x+1}{2x-1} \leq \frac{13}{5} \quad \text{soit} \quad 5 \leq \frac{4x+1}{2x-1} \leq \frac{13}{5}$$

Vous noterez alors que $5 > \frac{13}{5}$ ce qui assure que l'encadrement précédent est faux. De manière encore plus patente, si on choisit $x = 2$, on a écrit $5 \leq 3 \leq \frac{13}{5}$, ce qui est clairement faux. L'expression manipulée n'est pourtant pas très différente de celle de l'exercice.

2. On utilise la technique de réécriture d'un quotient d'expressions polynomiales de degré 1 vue dans la question 3 de l'exercice 3 et dans les deux premières questions de l'exercice 11. On note ainsi que

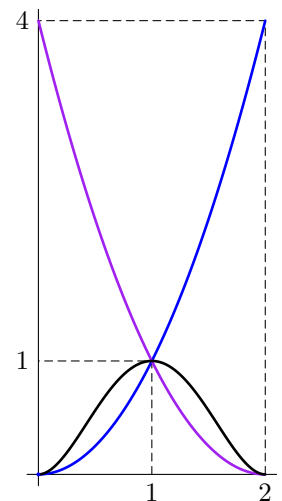
$$A = \frac{2(2x+1)-1}{2x+1} = 2 - \frac{1}{2x+1}$$

• On a montré que $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$ donc $-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{2x+1} \leq -\frac{1}{7}$ donc $\frac{5}{3} \leq A \leq \frac{13}{7}$.

• L'estimation obtenue est bien meilleure. On pouvait s'en douter. En effet, majorer le produit de deux expressions par le produit d'un majorant de chaque expression est souvent une mauvaise opération du point de vue de la précision; on ne tient pas compte du fait que les valeurs extrémales des expressions manipulées ne sont pas atteintes au même point. Donnons un exemple simple de ce phénomène. On considère deux fonctions

$$A: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad B: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \quad \quad \quad x \mapsto (x-2)^2$$

Le graphe de ces fonctions est représenté ci-contre, celui de A étant bleu et celui de B étant violet. Le meilleur majorant de A est clairement 4; il en est de même pour B . Les fonctions A et B ne prenant que des valeurs positives, on peut effectivement assurer que pour tout $x \in [0; 2]$, $A(x)B(x) \leq 4 \times 4$. Ceci étant, l'estimation est mauvaise puisque la fonction $x \mapsto A(x)B(x)$ ne prend que des valeurs plus petites que 1. On peut visualiser ce fait sur le graphe de $x \mapsto A(x)B(x)$ tracé en noir, et même le prouver. En majorant séparément les facteurs du produit AB , on n'a pas pu tenir compte du fait que lorsque A est maximale alors B est minimale et que lorsque B est maximale, A est minimale.



Correction de l'exercice 39

- Les simplifications demandées doivent être classiques. Vous pourrez relire les corrigés des exercices 5, 6 et 17.

$$A = \frac{(-1)^{3n+1}(3 \times 5)^n}{(2^2)^n \times ((-1) \times 3)^n} = \frac{(-1)^{3n+1} \times 3^n \times 5^n}{4^n \times (-1)^n \times 3^n} = \frac{(-1)^{2n+1} \times 5^n}{4^n}$$

Comme $2n+1$ est impair, $(-1)^{2n+1} = -1$. On peut alors regrouper les puissances si on le désire et écrire $A = -\left(\frac{5}{4}\right)^n$.

- On note que $B = \frac{(a^2)^n b^n}{a^{n+1} b} = \frac{a^{2n} b^n}{a^{n+1} b} = a^{n-1} b^{n-1}$. On peut ici aussi regrouper les puissances et écrire $B = (ab)^{n-1}$.

Correction de l'exercice 40

- On commence par simplifier les racines carrées en mettant en facteur les carrés apparaissant sous les radicaux.

$$\sqrt{x^4 + 3x^2} = \sqrt{x^2(x^2 + 3)} = \sqrt{x^2} \sqrt{x^2 + 3} = x\sqrt{x^2 + 3} \quad \text{puisque } x \geq 0.$$

et $\sqrt{4x^2 + 12} = \sqrt{4(x^2 + 3)} = \sqrt{4} \sqrt{x^2 + 3} = 2\sqrt{x^2 + 3}$

donc $A = \frac{x\sqrt{x^2 + 3} - 4\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(x-4)\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x} - 2}$

en utilisant l'identité (IR3). Finalement, $A = (\sqrt{x} + 2)\sqrt{x^2 + 3}$.

Correction de l'exercice 41

- Une lecture directe sur le cercle trigonométrique assure que $A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - On note que $47 = 3 \times 16 - 1$ donc $\frac{47\pi}{3} = 16\pi - \frac{\pi}{3}$. On en déduit que $B = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
 - On note que $\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{2} = -\frac{8\pi}{3} = -\frac{(6+2)\pi}{3} = -2\pi - \frac{2\pi}{3}$. On en déduit que $C = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - On note que $\frac{\pi}{4} + \frac{29\pi}{6} = \frac{61\pi}{12} = \frac{(48+13)\pi}{12} = 4\pi + \frac{13\pi}{12}$. On en déduit que $D = \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.
- On utilise à présent la formule (T20) qui assure que

$$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 1 - 2\left(\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)^2$$

$$\text{Or } \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{(12+1)\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc } \left(\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Pour conclure, il suffit de connaître le signe du sinus que l'on étudie. Comme $\frac{13\pi}{12}$ appartient à $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, on sait que ce réel est négatif. Finalement,

$$\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Correction de l'exercice 42

- La formule (T10) assure que $\sin(13\pi + \alpha) = \sin(12\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha)$. La formule (T9) assure alors que $\sin(13\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$.
- On peut simplifier directement l'expression via une lecture sur le cercle trigonométrique. On peut aussi utiliser successivement les formules (T10), (T13) et (T11) pour écrire

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$$

$$\text{donc } \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(-\alpha) = 0$$

en concluant avec la formule (T7).

- Je vous laisse chercher les formules utilisées dans cette dernière transformation.

$$\sin(7\pi - \alpha) = \sin(6\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\text{et } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

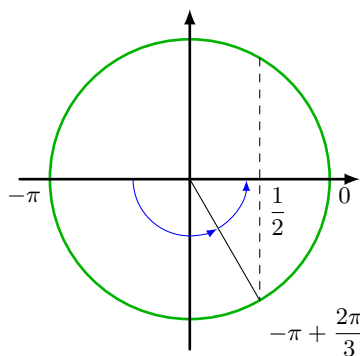
$$\text{donc } \sin(7\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin(\alpha)$$

Correction de l'exercice 43

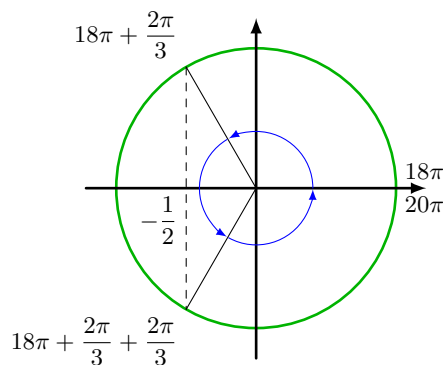
Comme dans les indications, chaque étude est résumée sur un des schémas ci-dessous. Ainsi,

1. L'ensemble des réels t appartenant à $[-\pi; 0]$ tels que $\cos(t) = \frac{1}{2}$ est $\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.
2. L'ensemble des réels t appartenant à $[18\pi; 20\pi]$ tels que $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ est $\left\{\frac{56\pi}{3}, \frac{58\pi}{3}\right\}$.
3. L'ensemble des réels t appartenant à $[11\pi; 12\pi]$ tels que $\sin(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est vide.
4. L'ensemble des réels t appartenant à $[-6\pi; -5\pi]$ tels que $\sin(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ est $\left[-6\pi; -\frac{23\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{21\pi}{4}; -5\pi\right]$.

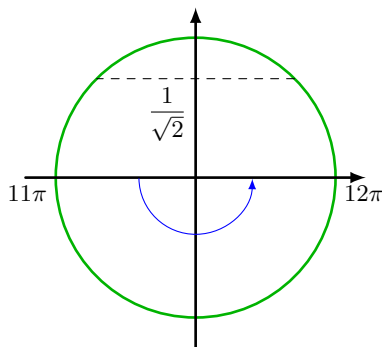
question 1



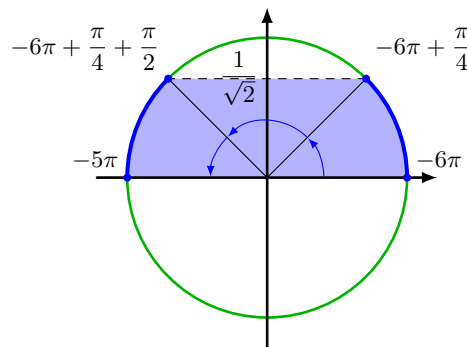
question 2



question 3



question 4



Correction de l'exercice 44

1. Soit $x \in]-\pi/4; \pi/4[$. On note que $2x$ appartient à $]-\pi/2; \pi/2[$ donc que la formule que l'on doit démontrer a un sens. Avant de lire ce corrigé, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 31 afin de savoir comment aborder la preuve de l'identité voulue. Il est illusoire d'essayer de transformer $f(2x)$ pour obtenir la forme finale voulue. Voilà pourquoi, on essaie de transformer le membre droit de l'identité. Plus précisément,

$$\frac{2f(x)}{1 - (f(x))^2} = \frac{\frac{2\sin(x)}{\cos(x)}}{1 - \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2} = \frac{\frac{2\sin(x)}{\cos(x)}}{\frac{(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}} = \frac{2\sin(x)}{\cos(x)} \times \frac{(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2}$$

On applique alors (T18) pour transformer le dénominateur et (T21) pour transformer le numérateur. On obtient finalement que pour tout $x \in]-\pi/4; \pi/4[$,

$$\frac{2f(x)}{1 - (f(x))^2} = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = f(2x)$$

2. Soit x et y deux réels appartenant à $[0; \pi/2[$. On sait que $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < -y \leq 0$ donc par simple sommation $-\frac{\pi}{2} < x - y < \frac{\pi}{2}$ en notant que la somme d'une estimation stricte et d'une estimation large est une estimation stricte. Je rappelle ici que les inégalités ne se «soustraient» pas. Ceux qui l'ont fait ont dû arriver à un résultat plutôt étrange, à savoir $0 < x - y < 0!$
- Pour la même raison que dans la première question, on essaie de transformer le membre de droite de l'identité étudiée. Par définition de f ,

$$\frac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)f(y)} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \frac{\sin(y)}{\cos(y)}} = \frac{\frac{\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} = \frac{\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)}$$

On applique alors (T15) pour transformer le dénominateur et (T17) pour transformer le numérateur. On obtient finalement que pour tout $(x, y) \in [0; \pi/2]^2$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)f(y)} = \frac{\sin(x - y)}{\cos(x - y)} = f(x - y)$$

Correction de l'exercice 45

Vous pourrez relire les exemples du cours page 11 et le corrigé des exercices 14 et 35.

- On note que $A = (4x)^2 + 4x - 3 = \left(4x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = \left(4x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$.
- On note que $B = -2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = -2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = -2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$.

On peut développer le facteur -2 mais cela peut attendre de savoir ce à quoi va servir la mise sous forme canonique de B .

Correction de l'exercice 46

Allez relire le corrigé de l'exercice 19 en particulier pour revoir les commentaires sur ce qu'est un raisonnement par équivalences.

1. Le cours assure directement que l'ensemble des réels x vérifiant $|1 - 3x| \geq 2$ est $]-\infty; -1/3] \cup [1; +\infty[$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel x vérifie $|x^2 - 1| \leq 2$ si et seulement si $-2 \leq x^2 - 1 \leq 2$ si et seulement si $-1 \leq x^2 \leq 3$. Comme le carré d'un réel est positif, on déduit des équivalences précédentes que le réel x vérifie $|x^2 - 1| \leq 2$ si et seulement si $0 \leq x^2 \leq 3$ si et seulement si $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{3}$. Ce passage est délicat sur le plan logique. Écrire «si et seulement si» entre deux assertions indique que les assertions sont équivalentes, c'est à dire: si la première est vraie, il en est de même de la deuxième; si la deuxième est vraie, il en est de même de la première. Dans notre cas

- si on sait que $x^2 \leq 3$ alors $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{3}$ puisque la fonction racine carrée est croissante.
- si on sait que $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{3}$ alors $x^2 \leq 3$ puisque la fonction carré est croissante.

Voilà pourquoi intervient la croissance de la fonction carré là où on ne l'attendait pas. Finalement le réel x vérifie $|x^2 - 1| \leq 2$ si et seulement si $|x| \leq \sqrt{3}$. L'ensemble des réels x vérifiant $|x^2 - 1| \leq 2$ est donc $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Correction de l'exercice 47

1. Vous pourrez relire le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question de l'exercice 38 pour revoir d'autres exemples de la technique mise en jeu. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1/4\}$,

$$\frac{2x+3}{4x-1} = \frac{\frac{1}{2}(4x-1) + \frac{7}{2}}{4x-1} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2(4x-1)}$$

2. Vous pourrez relire le corrigé de la question 3 de l'exercice 11 pour revoir un autre exemple de la technique mise en jeu. Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/2, 1\}$, $-2(x-1) + (2x+1) = 3$ donc, en divisant par $(x-1)(2x+1)$, on obtient

$$\frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(2x+1)}$$

On divise alors par 3 pour obtenir finalement que pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/2, 1\}$,

$$\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(2x+1)} = \frac{1}{(x-1)(2x+1)}$$

Correction de l'exercice 48

- Un développement direct conduit à $A = 8 + i$.
- On utilise le conjugué de $4 - i$ pour écrire B sous forme algébrique. Ainsi $B = \frac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{5+14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$.
- La puissance quatrième d'un nombre n'est jamais que le carré du carré de ce nombre. On calcule donc de proche en proche $(1-i)^2 = -2i$ donc $(1-i)^4 = (-2i)^2 = -4$. On utilise alors le conjugué de $2+i$ pour écrire C sous forme algébrique. Ainsi

$$C = \frac{-4(2-i)}{(2+i)(2-i)} = -\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$$

- Pour minimiser les calculs lors de la mise sous forme algébrique de D , il faut minimiser le nombre d'élévations au cube. Il faut donc mieux écrire D sous la forme du cube d'une fraction. Ainsi

$$D = \left(\frac{2+i}{1+2i}\right)^3 = \left(\frac{(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\right)^3 = \left(\frac{4-3i}{5}\right)^3 = \frac{(4-3i)^3}{5^3}$$

Pour développer le cube restant, on peut procéder en développant $(4 - 3i)^2$ avant de multiplier le résultat par $4 - 3i$ ou utiliser la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8. Utilisons cette technique. La troisième ligne du triangle de Pascal est $(1, 3, 3, 1)$ donc

$$(4 - 3i)^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 \times (-3i) + 3 \times 4 \times (-3i)^2 + (-3i)^3 = 64 - 144i - 108 + 27i = -44 - 117i$$

Finalement $D = -\frac{44}{125} - \frac{117}{125}i$.

Correction de l'exercice 49

- Écrire z sous la forme $2(1 + i)$ rend les calculs de puissance plus efficaces. On trouve directement $z^2 = 4(1 + i)^2 = 8i$. On en déduit ensuite $z^3 = z^2 \times z = 16i(1 + i) = 16(-1 + i)$, que l'on doit normalement écrire $z^3 = -16 + 16i$, si on veut respecter la définition précise d'une forme algébrique. Pour calculer z^4 , il est plus efficace de calculer $(z^2)^2$ que $z^3 \times z$ vue la forme élémentaire de z^2 . On trouve ainsi directement que $z^4 = -64$. Ce dernier résultat assure que toutes les puissances de z^4 sont élémentaire à calculer. Autrement dit, pour tout entier naturel n , la forme algébrique de z^{4n} est simple puisqu'on travaille avec un réel. Pour calculer z^{50} , on écrit donc

$$z^{50} = z^{4 \times 12 + 2} = (z^4)^{12} \times z^2 = (-64)^{12} \times 8i = (2^6)^{12} \times 2^3 i = 2^{75} i$$

Il n'est pas raisonnable de remplacer 2^{75} par sa valeur explicite, qui est 37778931862957161709568.

Correction de l'exercice 50

- Les manipulations demandées sont les mêmes que dans les exercices 5, 17 et 39, dont vous pourrez relire les corrigés. Il faut juste utiliser nos connaissances sur les puissances de i , précisées dans la leçon du jour. On calcule ainsi

$$A = \frac{2^{2n+1} \times i^{2n+1} \times (-1)^{n+2m}}{(2^3)^{n+m}} = \frac{2^{2n+1} \times (i^2)^n \times i \times (-1)^{n+2m}}{2^{3n+3m}} = \frac{(-1)^n \times i \times (-1)^{n+2m}}{2^{n+3m-1}} = \frac{i \times (-1)^{2n+2m}}{2^{n+3m-1}}$$

Or $2n + 2m$ est pair donc $(-1)^{2n+2m} = 1$ donc $A = \frac{i}{2^{n+3m-1}}$.

- On calcule de même

$$B = \frac{2^{3n+1} \times i^{3n+1} \times (2^2)^{-n}}{(-1)^n \times i^n} = \frac{2^{3n+1} \times i^{2n+1} \times 2^{-2n}}{(-1)^n} = \frac{2^{n+1} \times (i^2)^n \times i}{(-1)^n} = \frac{2^{n+1} \times (-1)^n \times i}{(-1)^n} = 2^{n+1} i$$

Correction de l'exercice 51

$$\begin{aligned} \bullet A &= \frac{10^5 + 10^3}{10^4} = \frac{10^2 + 1}{10} = \frac{101}{10} \\ \bullet B &= \frac{3^4}{2^5} + \left(\left(\frac{6}{4} \right)^2 \right)^2 = \frac{3^4}{2^5} + \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{3^4}{2^5} + \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^4 + 2 \times 3^4}{2^5} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2} \right)^5 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 52

- $A = 4x(1 - 4y^2) = 4x(1^2 - (2y)^2) = 4x(1 - 2y)(1 + 2y)$
- On utilise l'identité (IR3) pour faire apparaître des facteurs communs.

$$\begin{aligned} B &= (2x - y)((4x)^2 - (5y)^2) + ((2x)^2 - y^2)(4x - 5y) \\ &= (2x - y)(4x - 5y)(4x + 5y) + (2x - y)(2x + y)(4x - 5y) \\ &= (2x - y)(4x - 5y)((4x + 5y) + (2x + y)) \\ &= (2x - y)(4x - 5y)(6x + 6y) \end{aligned}$$

donc $B = 6(2x - y)(4x - 5y)(x + y)$

Correction de l'exercice 53

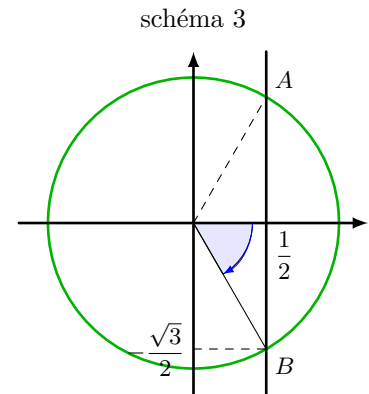
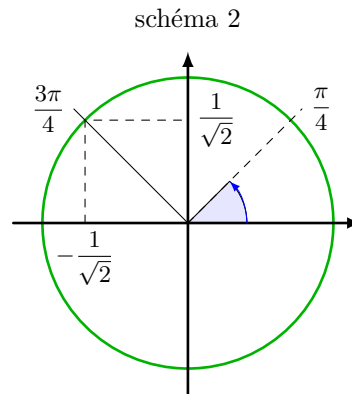
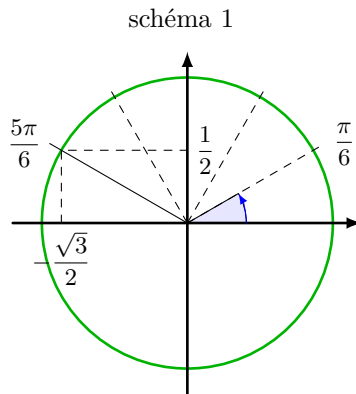
- Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25 et 26. La méthode de base consiste à fixer une variable x puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même côté du signe de comparaison. Dans notre cas, cela conduit à la preuve qui suit. Soit $x \in]0; 1[$. On note que

$$1 - x^2 - (1 - x)^2 = (1 - x)(1 + x) - (1 - x)^2 = (1 - x)(1 + x - (1 - x)) = 2x(1 - x)$$

Or $x > 0$ et $1 - x > 0$ par hypothèse. On en déduit que $1 - x^2 - (1 - x)^2 > 0$ c'est à dire $1 > (1 - x)^2 + x^2$. Finalement, pour tout $x \in]0; 1[$, $(1 - x)^2 + x^2 < 1$.

Correction de l'exercice 54

- On a placé $\frac{5\pi}{6}$ sur un cercle trigonométrique sur le schéma 1. La forme trigonométrique de $e^{5i\pi/6}$ est $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
- Comme le module de z est 1, on sait que $z = e^{3i\pi/4}$. On a placé $\frac{3\pi}{4}$ sur un cercle trigonométrique sur le schéma 2. La forme trigonométrique de z est $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.
- Sur le schéma 3, on a tracé la droite (AB) verticale et passant par le point de l'axe des abscisses d'abscisse $\frac{1}{2}$. Cette droite ne coupe le cercle trigonométrique qu'en deux points notés A et B . Seul le deuxième a une ordonnée négative. Le complexe z cherché est donc l'afixe de B . La connaissance du cercle trigonométrique permet de deviner l'ordonnée de B , à savoir $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, et une mesure de l'angle indiqué en bleu sur le schéma 3, à savoir $-\frac{\pi}{3}$. Finalement un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$ et sa forme algébrique est $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



Correction de l'exercice 55

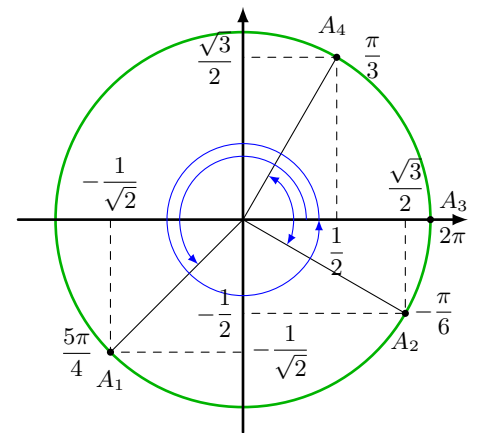
- Notons d'abord que $25 = 3 \times 8 + 1$ donc $\frac{25\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}$; un argument de z_4 est donc $\frac{\pi}{3}$. On a alors placé sur le schéma ci-contre les points A_1, A_2, A_3 et A_4 , d'afixe respective z_1, z_2, z_3 et z_4 , puis complété ce schéma avec les abscisses et ordonnées des points placés. On lit alors directement les formes algébriques des complexes étudiés, à savoir

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = 1$$

$$z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Correction de l'exercice 56

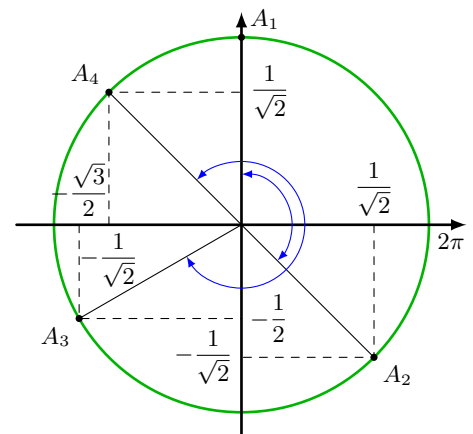
- On place sur le cercle trigonométrique tracé ci-contre les points A_1, A_2, A_3 et A_4 , d'afixe respective z_1, z_2, z_3 et z_4 dont l'énoncé précise les coordonnées. Il suffit à présent de connaître une mesure des angles tracé en bleu sur le schéma. On trouve ainsi directement que

un argument de z_1 est $\frac{\pi}{2}$,

et un argument de z_2 est $-\frac{\pi}{4}$,

et un argument de z_3 est $-\frac{5\pi}{6}$,

et un argument de z_4 est $\frac{3\pi}{4}$.



Correction de l'exercice 57

Dans cet exercice, on donne systématiquement la forme trigonométrique de chaque complexe afin de lire directement un argument de ceux-ci.

$$\bullet z_1 = 3 \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right). \text{ L'argument principal de } z_1 \text{ est } \frac{\pi}{2}.$$

$$\bullet z_2 = 3 \exp\left(\frac{3i\pi}{2}\right). \text{ L'argument principal de } z_2 \text{ est } -\frac{\pi}{2}.$$

$$\bullet z_3 = \exp\left(\frac{47i\pi}{2} + \frac{11i\pi}{3}\right) = \exp\left(\frac{163i\pi}{6}\right). \text{ Un argument de } z_3 \text{ est } \frac{163\pi}{6}.$$

Comme $163 = 6 \times 28 - 5$, $\frac{163\pi}{6} = 28\pi - \frac{5\pi}{6}$. L'argument principal de z_3 est donc $-\frac{5\pi}{6}$.

$$\bullet z_4 = \exp\left(\frac{8i\pi}{15} - \frac{3i\pi}{10} - \frac{11i\pi}{3}\right) = \exp\left(-\frac{103i\pi}{30}\right). \text{ Un argument de } z_4 \text{ est } -\frac{103\pi}{30}.$$

Comme $-103 = 30 \times (-4) + 17$, $\frac{103\pi}{30} = -4\pi + \frac{17\pi}{30}$. L'argument principal de z_4 est donc $\frac{17\pi}{30}$.

$$\bullet z_5 = \exp\left(\frac{15i\pi}{4} - \frac{36i\pi}{8}\right) = \exp\left(\frac{15i\pi}{4} - \frac{18i\pi}{4}\right) = \exp\left(-\frac{3i\pi}{4}\right). \text{ L'argument principal de } z_5 \text{ est } -\frac{3\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 58

Dans cet exercice, les puissances à calculer sont trop élevées pour travailler avec la forme algébrique des complexes. On doit donc utiliser la forme trigonométrique des complexes. Plus précisément, soit z est un complexe et n est un entier. Pour trouver la forme algébrique du complexe z^n , on peut opérer en trois étapes

- On écrit z sous forme trigonométrique,
- On calcule immédiatement z^n à l'aide de la dernière remarque technique de la leçon,
- On traduit le résultat sous forme algébrique.

La première étape est celle qui peut nous faire échouer, peu de complexes ayant une forme trigonométrique explicitement connue. Une bonne maîtrise du cercle trigonométrique est d'ailleurs nécessaire pour repérer ces complexes qui sont les multiples par un réel non nul de $1, i, \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Enfin, lorsque z est lui-même construit à partir d'autres complexes à l'aide d'opérateurs $+, -, \times$ et $/$, se pose la question savoir s'il est préférable de transformer ces autres complexes sous forme trigonométrique avant d'effectuer les opérations ou d'effectuer les opérations en premier lieu. Cela dépend de la nature des opérations, comme indiqué dans le paragraphe qui suit la dernière remarque technique de la leçon. Si z_1 et z_2 sont deux complexes et si $z = z_1 + z_2$, écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique est inutile car on ne connaît pas de méthode générale pour trouver la forme trigonométrique d'une somme; on pourra cependant étudier l'exercice de recherche 177 pour connaître un cas classique où la somme est gérable. En revanche, si z_1 et z_2 sont deux complexes et si $z = z_1 \times z_2$ ou $z = z_1/z_2$, écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique avant d'effectuer le produit ou le quotient est plus efficace car ces opérations sont plus rapide à effectuer avec une forme trigonométrique qu'avec une forme algébrique.

- Il est illusoire de développer la puissance d'ordre 10 d'un complexe. On écrit donc avant tout $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ sous forme trigonométrique. On note que

$$z_1 = \left(2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)^{10} = \left(2\sqrt{2}e^{i\pi/6}\right)^{10} = 2^{10}(\sqrt{2})^{10}e^{10i\pi/6} = 2^{10}2^5e^{5i\pi/3} = 2^{15}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Finalemt $z_1 = 16384 - 16384\sqrt{3}i$. La forme qui précède est exactement la forme algébrique du complexe z_1 . Ceci étant, il est plus naturel de mettre 16384 en facteur et d'écrire $z_1 = 16384(1 - i\sqrt{3})$. Dans la suite de cet exercice, on se permettra de ne pas donner la forme algébrique exacte si mettre en facteur un réel permet d'obtenir une écriture plus agréable.

- Les complexes $3 - i$ et $1 + 2i$ n'ont pas de forme trigonométrique explicite. Pour calculer la puissance d'ordre 27 du produit formant z_2 , il reste à espérer que ce produit a une forme trigonométrique simple.

$$z_2 = (5 + 5i)^{27} = \left(5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^{27} = \left(5\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{27} = (5\sqrt{2})^{27}e^{27i\pi/4}$$

Or $27 = 4 \times 6 + 3$ donc $\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$. On peut alors simplifier l'écriture de l'exponentielle complexe apparaissant dans l'expression trouvée de z_2 et achever le calcul.

$$z_2 = (5\sqrt{2})^{27}e^{3i\pi/4} = (5\sqrt{2})^{27}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 5^{27}(\sqrt{2})^{26}(-1 + i) = 5^{27} \times 2^{13}(-1 + i)$$

Il n'est pas raisonnable de calculer explicitement $5^{27} \times 2^{13}$ vue la taille de ce nombre.

- Le complexe apparaissant au numérateur de z_3 se met sous forme trigonométrique de manière explicite; le dénominateur de ce même complexe est sous forme trigonométrique. Il est donc pertinent d'effectuer le quotient de ces deux complexes, le premier étant effectivement écrit sous forme trigonométrique, avant de calculer la puissance. On obtient ainsi

$$z_3 = \left(\frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)}{e^{i\pi/12}} \right)^{15} = \left(\frac{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}}{e^{i\pi/12}} \right)^{15} = \left(\sqrt{2} \exp \left(-\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{12} \right) \right)^{15} = \left(\sqrt{2} \exp \left(-\frac{i\pi}{3} \right) \right)^{15} = (\sqrt{2})^{15} e^{-5i\pi}$$

On peut écrire $(\sqrt{2})^{15}$ plus élégamment car $(\sqrt{2})^{15} = (\sqrt{2})^{14} \sqrt{2} = 2^7 \sqrt{2} = 128\sqrt{2}$. Finalement $z_3 = -128\sqrt{2}$.

- Les complexes apparaissant au numérateur et au dénominateur de z_4 se mettent sous forme trigonométrique de manière explicite. Il est donc pertinent d'effectuer le quotient de ces deux complexes, après mise sous forme trigonométrique, avant de calculer la puissance. On obtient ainsi

$$z_4 = \left(\frac{2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)}{2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)} \right)^8 = \left(\frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/3}} \right)^8 = (e^{2i\pi/3})^8 = e^{16i\pi/3}$$

Or $16 = 3 \times 6 - 2$ donc $\frac{16\pi}{3} = 6\pi - \frac{2\pi}{3}$ donc $z_4 = e^{-2i\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

- Les facteurs complexes du produit apparaissant dans z_5 se mettent sous forme trigonométrique de manière explicite. Il est donc pertinent d'effectuer le produit de ces deux complexes, après mise sous forme trigonométrique, avant de calculer la puissance. On obtient ainsi

$$z_5 = \left(4\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) \right)^{-10} = (4\sqrt{2} e^{i\pi/4} e^{-i\pi/6})^{-10} = \left(4\sqrt{2} \exp \left(\frac{i\pi}{12} \right) \right)^{-10} = (4\sqrt{2})^{-10} e^{-5i\pi/6}$$

On peut ici encore arranger l'écriture de la première puissance car $(4\sqrt{2})^{-10} = 4^{-10} (\sqrt{2})^{-10} = 4^{-10} 2^{-5}$. On n'écrit pas 4 sous la forme 2^2 pour tout rassembler sous la forme d'une puissance de 2, anticipant le fait que l'écriture de $e^{-5i\pi/6}$ sous forme algébrique fait apparaître un facteur $1/2$. En effet

$$z_5 = 4^{-10} 2^{-5} \times \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = -4^{-10} 2^{-6} (\sqrt{3} + i) = -4^{-10} 4^{-3} (\sqrt{3} + i) = -\frac{\sqrt{3} + i}{4^{13}}$$

Le choix d'écrire une puissance d'ordre positif au dénominateur ou de laisser une puissance négative en facteur est purement une affaire de goût.

- Les complexes apparaissant au numérateur et au dénominateur de z_6 ne se mettent pas sous forme trigonométrique de manière explicite. On doit donc effectuer le quotient en utilisant les formes algébriques en espérant que le résultat se mette sous forme trigonométrique. On calcule alors

$$\frac{2 + i\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + i} = \frac{(2 + i\sqrt{3})(3\sqrt{3} - i)}{(3\sqrt{3} + i)(3\sqrt{3} - i)} = \frac{7\sqrt{3} + 7i}{28} = \frac{\sqrt{3} + i}{4} = \frac{e^{i\pi/6}}{2}$$

On en déduit que $z_6 = \frac{e^{11i\pi/6}}{2^{11}}$. Or $11 = 6 \times 2 - 1$ donc $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$. Finalement,

$$z_6 = \frac{e^{-i\pi/6}}{2^{11}} = \frac{1}{2^{11}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = \frac{\sqrt{3} - i}{2^{12}} = \frac{\sqrt{3} - i}{4096}$$

Comme dans le calcul précédent, écrire une puissance d'ordre positif au dénominateur ou une puissance négative en facteur est purement une affaire de goût. De même, on peut laisser une puissance de 2 ou la calculer comme je l'ai fait.

Correction de l'exercice 59

- On note que $A = \frac{\frac{xy+1}{y}}{\frac{xy+1}{x}} = \frac{xy+1}{y} \times \frac{x}{xy+1} = \frac{x}{y}$
- Comme 1 est un point d'annulation du dénominateur de B , ce dernier se factorise sans calcul. Le produit des points d'annulation de cette expression polynomiale du second degré étant en effet 3, on sait que $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. On pourra refaire quelques calculs de ce type, en revoyant les exercices 13 et 16. On note alors que l'on peut mettre en facteur $x-1$ dans les deux termes du numérateur de B et dans son dénominateur. Après simplification, on obtient donc

$$B = \frac{x-1 - \frac{1}{x+1}}{x-3} = \frac{(x-1)(x+1) - 1}{x-3} = \frac{x^2 - 2}{x-3} \times \frac{1}{x+1} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+1)(x-3)}$$

Ne pas oublier de factoriser le numérateur de B puisque c'est la consigne de l'énoncé.

Correction de l'exercice 60

- Effectuons la preuve de chacune des identités en suivant la méthode exposée et illustrée dans les exercices 25, 26 et 53, que vous pourrez relire: on fixe un réel x puis on factorise l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité étudiée de même côté du signe de comparaison. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. On note que

$$\frac{2x}{1+x^2} + 1 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$$

et

$$1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$$

Comme le carré d'un nombre réel est positif, on a montré que $\frac{2x}{1+x^2} + 1 \geq 0$ et $1 - \frac{2x}{1+x^2} \geq 0$. Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On aurait pu être plus efficace en notant que les deux identités prouvées, que l'on a regroupées sous la forme d'un encadrement, s'écrit aussi en utilisant le point (V4)

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1, \quad \text{soit} \quad \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1$$

en utilisant successivement le point (V3) et le caractère positif de $x^2 + 1$. On a donc une seule identité à démontrer et la preuve se mène comme dans le premier point. En effet, en notant que $|x|^2 = x^2$, on peut écrire

$$1 - \frac{2|x|}{1+x^2} = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{x^2 + 1} = \frac{|x|^2 - 2|x| + 1}{x^2 + 1} = \frac{(|x| - 1)^2}{x^2 + 1}$$

On conclut alors comme dans le premier point, en utilisant la positivité des carrés de réels.

Correction de l'exercice 61

$$1. S_1 = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$$

$$2. S_2 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

Vous noterez que la dernière factorisation est immédiate car 1 est un point d'annulation de la fonction $n \mapsto n^2 + n - 2$. Allez revoir les exercices 13 et 16 pour réviser comment utiliser le produit des points d'annulation d'une expression polynomiale de degré 2 afin de factoriser cette dernière.

$$3. S_3 = \sum_{k=0}^{2n} k - \sum_{k=0}^9 k = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{9 \times 10}{2} = n(2n+1) - 45 = (2n-9)(n+5)$$

La dernière factorisation a été menée en déterminant les points d'annulation de la fonction $f : n \mapsto 2n^2 + n - 45$ à l'aide du discriminant D de cette dernière, qui vaut 361. En essayant de simplifier la racine carrée de D , on a noté que cet entier est 19^2 . On aurait aussi pu remarquer que -5 est un point d'annulation de f et travailler comme dans l'exemple précédent.

$$4. S_4 = 3 \sum_{k=n+1}^{3n+1} k - \sum_{k=n+1}^{3n+1} 1 = 3 \left(\sum_{k=0}^{3n+1} k - \sum_{k=0}^n k \right) - (2n+1)$$

$$= 3 \left(\frac{(3n+1)(3n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right) - (2n+1)$$

$$= 3 \times \frac{8n^2 + 8n + 2}{2} - 2n - 1$$

$$= 12n^2 + 10n + 2$$

$$= 2(2n+1)(3n+1)$$

La dernière factorisation a été menée en utilisant les techniques standards sur les expressions polynomiales de degré 2: calcul de discriminant, formules usuelles des points d'annulation... vous pourrez revoir la proposition de la page 12.

1. On note que $S_1 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{y}\right)^k$. On distingue alors deux cas.

• si $x = y$, alors $S_1 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$

• Si $x \neq y$ alors $\frac{x}{y} \neq 1$ donc $S_1 = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{y} - 1}$. Dans ce cas, on peut supprimer les fractions «étagées» en notant que

$$S_1 = \frac{\frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} - 1}{\frac{x}{y} - 1} = \frac{\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{y^{n+1}}}{\frac{x - y}{y}} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{y^{n+1}} \times \frac{y}{x - y} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{y^n(x - y)}$$

2. On note que $S_2 = \sum_{k=0}^{2n+1} (-x)^k$. On distingue alors deux cas.

• si $x = -1$, alors $S_2 = \sum_{k=0}^{2n+1} 1 = 2n + 2$

• Si $x \neq -1$ alors $-x \neq 1$ donc $S_2 = \frac{(-x)^{2n+2} - 1}{-x - 1}$. Or $(-x)^{2n+2} = (-1)^{2n+2} x^{2n+2} = x^{2n+2}$ puisque $2n + 2$ est pair. On en déduit que dans ce deuxième cas,

$$S_2 = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 + x}$$

3. On note que $S_3 = \sum_{k=0}^n y^n \left(\frac{x}{y}\right)^k = y^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{y}\right)^k$. On retrouve alors la somme S_1 déjà étudiée. On peut donc directement en conclure, en simplifiant les puissances dans le deuxième cas, que

• Si $x = y$, $S_3 = (n + 1)y^n$

• Si $x \neq y$, $S_3 = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$



On peut écrire le résultat précédent sous une autre forme: pour tout $(x, y, n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$,

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$$

Cette identité généralise l'identité remarquable (IR3), qui n'est que le cas particulier où $n = 1$. Elle devra être mémorisée en sup car elle rend les mêmes services que (IR3) dans les exercices de factorisation.

4. $S_4 = \sum_{k=1}^{n+1} (e^x)^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} e^x (e^x)^k = e^x \sum_{k=1}^{n+1} (e^x)^k = e^x \left(\sum_{k=0}^{n+1} (e^x)^k - 1 \right)$. On distingue alors deux cas.

• Si $x = 0$, $S_4 = \sum_{k=1}^{n+1} 1 = n + 1$. Notez que dans ce cas, l'usage de l'expression initiale de S_4 est préférable.

• Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ donc $S_4 = e^x \left(\frac{(e^x)^{n+2} - 1}{e^x - 1} - 1 \right) = e^x \left(\frac{e^{(n+2)x} - 1}{e^x - 1} - 1 \right)$.

On peut obtenir une expression plus simple en mettant les deux termes de la parenthèse au même dénominateur. En effet,

$$S_4 = e^x \times \frac{e^{(n+2)x} - e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x (e^{(n+1)x} e^x - e^x)}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} (e^{(n+1)x} - 1)}{e^x - 1}$$

Notez que l'on obtient directement ce résultat si on utilise la deuxième astuce technique pour faire commencer la somme à l'indice 0. Pour comprendre le calcul qui suit, n'oubliez pas de le réécrire avec des sommes «développées» comme dans l'exemple du cours. On suppose toujours que $x \neq 0$ afin que $e^x \neq 1$.

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n+1} (e^x)^{k+1} = \sum_{k=0}^n (e^x)^{k+2} = e^{2x} \sum_{k=0}^n (e^x)^k = e^{2x} \times \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} (e^{(n+1)x} - 1)}{e^x - 1}$$

5. Traitons successivement le cas de S_5 avec les deux techniques présentées à la fin de la leçon. Dans tous les cas, il faut gérer à part le cas où $x = 1$. Dans ce cas, $S_5 = 4(2n + 1)$. Dans toute la suite de ce point, on suppose que $x \neq 1$ et on peut utiliser la formule donnant la somme de termes successifs d'une suite géométrique de raison différente de 1. Avec la première technique, on calcule

$$S_5 = 4 \sum_{k=n}^{3n} x^k = 4 \left(\sum_{k=0}^{3n} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = 4 \left(\frac{x^{3n+1} - 1}{x - 1} - \frac{x^n - 1}{x - 1} \right) = \frac{4(x^{3n+1} - x^n)}{x - 1}$$

Avec la seconde technique, on calcule de manière un peu plus efficace

$$S_5 = \sum_{k=0}^{2n} 4x^{n+k} = \sum_{k=0}^{2n} 4x^n x^k = 4x^n \sum_{k=0}^{2n} x^k = \frac{4x^n(x^{2n+1} - 1)}{x - 1}$$

On obtient bien le même résultat, même si son écriture n'est pas identique.

Correction de l'exercice 63

$$\begin{aligned} \bullet A &= \left(-\frac{2}{7} - \frac{4}{7} - \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{5} + \frac{3}{5} \right) = -\frac{9}{7} - 1 = -\frac{16}{7} \\ \bullet B &= \frac{8}{24} + \frac{4}{24} - \frac{5}{24} = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 64

On pourra relire le corrigé de l'exercice 10.

- Le terme en x^2 de $(1 - 2x)(3 + x)(3x + 2)$ est obtenu dans trois produits du développement: celui de $-2x$ par x par 2, celui de $-2x$ par 3 par $3x$ et celui de 1 par x par $3x$. Ce terme est donc $-19x^2$.
- Le terme en x de $(x - 2)(x^2 + 3x - 1)$ est obtenu dans deux produits du développement: celui de x par -1 et celui de -2 par $3x$. Ce terme est donc $-7x$.

Correction de l'exercice 65

$$\begin{aligned} \bullet A &= (xy)^2 + 6xy + 9 = (xy + 3)^2 \\ \bullet B &= (x^2 - y^2) - (x - y)(x + 1) = (x - y)(x + y) - (x - y)(x + 1) = (x - y)((x + y) - (x + 1)) = (x - y)(y - 1) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 66

Chaque calcul de dérivée est en premier lieu présenté sans astuce, c'est à dire sans transformation préalable de la fonction à dériver. On présente ensuite, lorsque c'est possible, un calcul plus efficace lié à une réécriture de la fonction à dériver, en suivant les idées du dernier paragraphe du cours. Pour dériver une fonction, il faut reconnaître dans l'expression de cette fonction un des modèles du cours présenté dans les points (D1) à (D5). Les modèles (D1) à (D4) sont classés par ordre de «pénibilité» croissante pour effectuer les calculs. C'est pourquoi, dériver $x \mapsto x + \sin(x)$, qui relève du modèle (D1), est plus simple que dériver $x \mapsto x \sin(x)$, qui relève du modèle (D3), lui-même plus simple que dériver $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, qui relève du modèle (D4). Le cas de (D5) est un peu particulier. Il est délicat à repérer et à utiliser **sauf** lorsque u est une fonction affine (avec les notations de la leçon). En effet, si a et b sont deux réels et si f est une fonction, la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$ est $x \mapsto af'(ax + b)$. En tout état de cause, simplifier l'expression d'une fonction avant de la dériver consiste à la transformer de telle sorte que sa dérivation fasse appel à un modèle plus simple que celui nécessaire pour gérer l'écriture initiale.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_1(x) = -3 \sin(3x - 4) + e^{-x}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_2(x) = (2x - 1)e^{-2x} + (x^2 - x + 1) \times (-2e^{-2x}) = (-2x^2 + 4x - 3)e^{-2x}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_3(x) = -\sin(x) \times \sin(x) + \cos(x) \times \cos(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$.

En étant observateur, on reconnaît dans l'expression précédente l'identité (T18) et on peut écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_3(x) = \cos(2x)$. Il aurait sans doute été plus utile de repérer l'identité (T21) dans l'expression de f et d'écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$. On retrouve alors directement l'expression simple de f'_3 .

- Pour tout $x \in]-1; 1[$, $f'_4(x) = -\frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2}$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'_5(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

Pour dériver f_5 , on a utilisé le modèle (D4). On aurait pu utiliser le modèle (D3) en notant que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f_5(x) = \frac{1}{x} \times \sin(x)$$

On obtient alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'_5(x) = -\frac{1}{x^2} \times \sin(x) + \frac{1}{x} \times \cos(x) = -\frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{\cos(x)}{x}$$

C'est évidemment le même résultat mais son écriture est subtilement différente. Dans le premier cas, le résultat est un quotient de deux fonctions; dans le second ce résultat est une somme de deux fonctions. Chacune de ces formes est adaptée à certains types de calcul. Imaginons par exemple devoir dériver la fonction f'_5 . Effectuer ce travail avec la première expression est pénible et demande d'introduire la fonction annexe $u : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$ pour pouvoir le rédiger. On écrit alors que

pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $u'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x)) - \cos(x) = -x \sin(x)$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'_5(x) = \frac{u(x)}{x^2}$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f''_5(x) = \frac{u'(x) \times x^2 - u(x) \times (2x)}{(x^2)^2} = \frac{x^2 u'(x) - 2xu(x)}{x^4} = \frac{xu'(x) - 2u(x)}{x^3}$

$$= \frac{-x^2 \sin(x) - 2(x \cos(x) - \sin(x))}{x^3}$$

$$= \frac{(2 - x^2) \sin(x) - 2x \cos(x)}{x^3}$$

Utilisons à présent l'autre expression de f'_5 et exploitons à nouveau l'idée d'écrire les quotients sous forme de produits. On écrit aussi toutes les puissances sous la forme préconisée dans la leçon. Autrement dit, on transforme l'écriture de f'_5 sous la forme: pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'_5(x) = -x^{-2} \times \sin(x) + x^{-1} \times \cos(x)$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f''_5(x) = -(-2)x^{-3} \times \sin(x) - x^{-2} \cos(x) + (-1)x^{-2} \times \cos(x) + x^{-1}(-\sin(x))$

$$= \frac{2 \sin(x)}{x^3} - \frac{2 \cos(x)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x}$$

Vous noterez que ce deuxième calcul est beaucoup plus rapide et que l'on ne fait pas apparaître des puissances trop élevées que l'on doit simplifier. Cette technique consistant à voir le quotient de deux expressions A et B comme le produit de A par l'inverse de B est très efficace lorsque B est une puissance, comme dans le cadre de cet exemple. En effet, l'inverse d'une puissance d'ordre positif est une puissance, certes d'ordre négatif, mais qui se dérive formellement comme toute puissance.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'_6(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2 + 1) - \sqrt{x} \times (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1) - 2(\sqrt{x})^2 \times (2x)}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2}$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_7(x) = x^{-7}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'_7(x) = -7x^{-8}$, que l'on peut réécrire immédiatement sous la forme plus classique: pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'_7(x) = -\frac{7}{x^8}$$

Si vous oubliez de visualiser f_7 comme une puissance d'ordre négatif et utilisez (D4) pour effectuer la dérivation, vous obtenez le calcul plus long qui suit. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'_7(x) = -\frac{7x^6}{(x^7)^2} = -\frac{7x^6}{x^{14}} = -\frac{7}{x^8}$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_8(x) = \frac{(6x) \times (x^2 + 1) - (3x^2 + 5) \times (2x)}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

Si vous avez bien assimilé la technique de réécriture d'un quotient d'expressions polynomiales de degré 1 vue dans la question 3 de l'exercice 3, dans les deux premières questions de l'exercice 11, dans la deuxième question de l'exercice 38 et dans l'exercice 47, vous pouvez l'adapter «de tête» à l'expression de f_8 , même si les expressions polynomiales mises en jeu sont de degré 2. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_8(x) = \frac{3(x^2 + 1) + 2}{x^2 + 1} = 3 + \frac{2}{x^2 + 1}$$

On utilise alors le cas particulier de (D4), ce qui donne directement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_8(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$.

9. Si on ne transforme pas l'écriture de l'expression de f_9 , le calcul doit être décomposé. Pour ce faire, on introduit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{e^x}$. En utilisant le modèle (D5) avec comme fonction f la fonction racine carrée et comme fonction u la fonction exponentielle, on sait que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x \times \frac{1}{2\sqrt{e^x}} = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$$

$$\text{Or pour tout } x \in \mathbb{R}, f_9(x) = \frac{x}{g(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{donc pour tout } x \in \mathbb{R}, f_9'(x) &= \frac{1 \times g(x) - x \times g'(x)}{g(x)^2} = \frac{g(x) - xg'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{\sqrt{e^x} - \frac{x\sqrt{e^x}}{2}}{\frac{e^x}{4}} = \frac{\sqrt{e^x} \left(1 - \frac{x}{2}\right)}{\frac{e^x}{4}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{e^x}} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Ceci étant les propriétés de l'exponentielle permettent de faire «disparaître» la racine carrée et le quotient, ce qui conduit à un calcul de dérivation immédiat et un résultat bien plus exploitable. En effet

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f_9(x) = xe^{-x/2}$$

$$\text{donc pour tout } x \in \mathbb{R}, f_9'(x) = 1 \times e^{-x/2} + x \times \left(-\frac{1}{2}e^{-x/2}\right) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-x/2}$$

10. On utilise le modèle (D5) avec comme fonction f la fonction cosinus et comme fonction u la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+1}$.

$$\text{pour tout } x \in]-1/2; +\infty[, u'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\text{Or pour tout } x \in]-1/2; +\infty[, f_{10}(x) = \cos(u(x))$$

$$\text{donc pour tout } x \in]-1/2; +\infty[, f_{10}'(x) = u'(x) \times (-\sin(u(x))) = -\frac{\sin(\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+1}}$$

11. On utilise le modèle (D5) avec comme fonction f la fonction $x \mapsto x^3$ et comme fonction u la fonction $x \mapsto \ln(3x^3) + 1$. Pour dériver u , on utilise aussi (D5) avec la fonction logarithme et la fonction $x \mapsto 3x^3$. En décomposant ainsi le processus de dérivation, on obtient le calcul qui suit.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}, u'(x) = 9x^2 \times \frac{1}{3x^3} = \frac{3}{x}$$

$$\text{Or pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}, f_{11}(x) = (u(x))^3$$

$$\text{donc pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}, f_{11}'(x) = 3u'(x) \times (u(x))^2 = \frac{9(\ln(3x^3) + 1)^2}{x}$$

On aurait pu optimiser le calcul. En effet, la formule (LN1) assure que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $u(x) = 3\ln(x) + \ln(3) + 1$. Sous cette forme, le calcul de u' est immédiat.

12. On utilise le modèle (D5) avec comme fonction f la fonction exponentielle et comme fonction u la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$, que l'on réécrit sous la forme $x \mapsto x^{-1}\ln(x)$ pour plus d'efficacité comme dans le calcul de la dérivée de f_5 .

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}, u'(x) = -x^{-2} \times \ln(x) + x^{-1} \times \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$\text{Or pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}, f_{12}(x) = \exp(u(x))$$

$$\text{donc pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}, f_{12}'(x) = u'(x) \times \exp(u(x)) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Correction de l'exercice 67

1. En utilisant l'identité remarquable (IR3) pour optimiser la première étape du calcul, le développement de l'expression proposé est

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2)(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 4 = 1 + 2\sqrt{6}$$

2. La première question nous conduit à généraliser la technique de la «quantité conjuguée», vue dans les exercices 22 et 23, pour écrire

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2)(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2}{2\sqrt{6} + 1}$$

On utilise à nouveau la technique de la «quantité conjuguée». On obtient

$$A = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2)(2\sqrt{6} - 1)}{(2\sqrt{6} + 1)(2\sqrt{6} - 1)} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 2}{(2\sqrt{6})^2 - 1}$$

On prend garde de bien simplifier les racines carrées comme dans l'exercice 22. En effet

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sqrt{6} &= \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \text{et } \sqrt{3}\sqrt{6} &= \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \\ \text{donc } A &= \frac{3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{6} + 2}{23} \end{aligned}$$

Pour conclure, vous noterez que faire disparaître les racines carrées des dénominateurs n'est pas toujours une bonne idée. En effet, l'écriture finale de A est plus complexe que son écriture initiale. Il faut donc une bonne raison pour faire ce calcul... Ici c'est l'énoncé qui l'exige.

Correction de l'exercice 68

L'objectif de cet exercice est de montrer deux identités qui sont des égalités. Avant de lire ce corrigé, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 31 qui expose et illustre la méthode pour aborder ce genre de preuve, et ceux des exercices 24 et 44 qui présentent trois autres exemples de cette méthode. Dans les deux questions, on privilégie les développements.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x)f(y) + g(x)g(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} + \frac{e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} \\ &= \frac{2e^x e^y + 2e^{-x} e^{-y}}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = f(x+y) \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x)g(y) + g(x)f(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} + \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} \\ &= \frac{2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = g(x+y) \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$. Vous pourrez remarquer que cette identité généralise celle établie dans la troisième question de l'exercice 31; il suffit en effet de considérer le cas où les réels x et y introduit sont égaux.

Correction de l'exercice 69

Les calculs de primitives sont en premier lieu des exercices d'identification de modèles connus. De manière analogue aux calculs de dérivées effectués dans l'exercice 66, il est souvent utile de réécrire l'expression de la fonction dont on cherche une primitive pour faire apparaître un de ces modèles. Dans chacun des calculs qui suit, on précisera le modèle utilisé en utilisant les références de la leçon. Notez que l'on identifie souvent les modèles «à une constante multiplicative près»; si la constante n'est pas claire, une dérivation rapide permet de la préciser.

1. On peut appliquer directement la formule (PR3) avec la fonction $f : x \mapsto x^3$ dont une primitive est connue. Une primitive de f_1 est

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{(x+1)^4}{4} \end{aligned}$$

On peut aussi noter que la dérivée de $x \mapsto x+1$ est $x \mapsto 1$; La fonction f_1 est de la forme $x \mapsto u'(x)(u(x))^3$ où u est la fonction $x \mapsto x+1$. On retrouve alors le résultat à l'aide de (PR7).

2. On peut appliquer directement la formule (PR3) avec la fonction sinus dont une primitive est connue. Une primitive de f_2 est

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\frac{\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Ici aussi, on peut noter que la dérivée de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto 2$, La fonction f_2 est de la forme $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$ où u est la fonction $x \mapsto 2x$, à un facteur multiplicatif $1/2$ près. On retrouve alors le résultat à l'aide de (PR6).

3. On peut appliquer directement la formule (PR3) avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ dont une primitive est connue. Une primitive de f_3 est

$$\begin{array}{ccc}]-1/2; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(|2x+1|)}{2} \end{array} \quad \text{soit,} \quad \begin{array}{ccc}]-1/2; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(2x+1)}{2} \end{array}$$

puisque pour tout $x \in]-1/2; +\infty[$, $2x+1 > 0$. Encore une fois, on peut noter que la dérivée de $x \mapsto 2x+1$ est $x \mapsto 2$. La fonction f_3 est de la forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ où u est la fonction $x \mapsto 2x+1$, à un facteur multiplicatif $1/2$ près. On retrouve alors le résultat à l'aide de (PR8).

4. La primitive de f_4 est connue si on prend garde à écrire cette fonction sous la forme $x \mapsto x^{-5}$; elle apparaît en effet sur la troisième ligne du tableau des primitives à mémoriser. Une primitive de f_4 est donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^{-5+1}}{-5+1} \end{array}, \quad \text{c'est à dire} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{4x^4} \end{array}$$

5. La fonction f_5 n'est pas un modèle connu. Mais la transformation vue dans les exercices 3, 11, 38 et 47 assure que pour tout $x \in]-2; +\infty[$,

$$f_5(x) = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}$$

En utilisant (PR1) pour gérer la somme, on est amené à chercher une primitive de $x \mapsto 2$ et de $x \mapsto \frac{1}{x+2}$. Cette dernière est déterminée à l'aide de (PR3) comme dans le calcul d'une primitive de f_3 . Finalement, en notant que la fonction $x \mapsto x+2$ ne prend que des valeurs strictement positives sur l'intervalle de travail, une primitive de f_5 est

$$\begin{array}{ccc}]-2; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - \ln(x+2) \end{array}$$

6. On peut noter que la dérivée de $x \mapsto x^2+1$ est $x \mapsto 2x$. La fonction f_6 est donc de la forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ où u est la fonction $x \mapsto x^2+1$, à un facteur multiplicatif $3/2$ près. On applique alors (PR8). Finalement, en notant que la fonction $x \mapsto x^2+1$ ne prend que des valeurs strictement positives sur l'intervalle de travail, une primitive de f_6 est donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3 \ln(x^2+1)}{2} \end{array}$$

7. On peut noter que la dérivée de la fonction cosinus est $x \mapsto -\sin(x)$. La fonction f_7 est de la forme $x \mapsto u'(x)(u(x))^2$ où u est la fonction cosinus, à un facteur -1 près. On applique alors (PR7). Une primitive de f_7 est donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{(\cos(x))^3}{3} \end{array}$$

8. On peut noter que la dérivée de la fonction logarithme est $x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f_8 est de la forme $x \mapsto u'(x)u(x)$ où u est la fonction logarithme. On applique alors (PR7). Une primitive de f_8 est donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(\ln(x))^2}{2} \end{array}$$

9. On peut noter que la dérivée de la fonction racine carrée est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. La fonction f_9 est de la forme $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ où u est la fonction racine carrée, à un facteur 2 près. On applique alors (PR4). Une primitive de f_9 est donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2e^{\sqrt{x}} \end{array}$$

Correction de l'exercice 70

- Comme $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, un dénominateur commun aux trois termes formant A est $(x - 1)(x + 1)$. On note alors que

$$A = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x-1) + x - (x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)}$$

- On note que $B = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} - \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} = \frac{x^2 - (x+1)(x-1)}{x(x+1)} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$.

Correction de l'exercice 71

- On simplifie les racines carrées comme les exercices 22, 23 et 67.

$$A = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2 \times 3} + 2\sqrt{2 \times 3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$\text{et } B = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{-1} = 2\sqrt{6} - 5$$

Convention

Une convention est un choix arbitraire pour le résultat d'une opération qui n'a pas de sens réel en mathématiques. Si on considère par exemple un réel x et un entier naturel non nul n , on définit x^n comme étant le produit $x \times x \times x \times \dots \times x$, le facteur x apparaissant n fois dans le produit. Cette définition n'a pas de sens lorsque $n = 0$, mais on peut convenir que $x^0 = 1$. L'objet d'une telle convention est de ne pas avoir à traiter de cas particulier dans les calculs. Pour qu'une convention soit utile, il faut donc que les calculs dans lesquels on utilise la dite convention soient cohérents avec les calculs «usuels». On sait par exemple que si x est un réel et m et n sont deux entiers non nuls,

$$x^{m+n} = x^m \times x^n$$

Cette formule qui résulte de la simple associativité de l'opération $\times$ doit rester valable lorsque l'on utilise notre convention. Dans notre cas, on note que si x est un réel et m est un entier non nul, $x^{m+0} = x^m = x^m \times 1 = x^m \times x^0$ et la formule générale reste valable. On peut vérifier que la convention consistant à écrire que la puissance d'ordre 0 d'un réel est égale à 1 est cohérente avec tous les calculs algébriques possibles; c'est pourquoi on accepte une telle écriture. Parfois, il n'est pas possible de choisir une convention qui satisfasse toutes les formules connues; dans ce cas, on n'en fixe aucune!

Congruence

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on dit que p est congru à q modulo n et on note $p \equiv q [n]$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p - q = kn$. Par exemple tout nombre pair est congru à 0 modulo 2 alors que tout nombre impair est congru à 1 modulo 2. On note aussi que $47 \equiv -1 [6]$ puisque $47 - (-1) = 8 \times 6$. Une fois n fixé, on peut établir une relation sur l'ensemble des couples d'entiers relatifs, c'est à dire une technique pour associer la valeur logique *vrai* ou *faux* à chaque couple (p, q) : on dit que p et q sont en relation si et seulement si p est congru à q modulo n . Cette relation, dite de congruence modulo n , est centrale en arithmétique; vous l'étudierez en sup.

Développer et réduire

Développer et réduire une **expression polynomiale** ? en un objet x consiste à écrire cette expression sous la forme d'une somme de termes, chacun étant le produit d'un objet indépendant de x et d'une puissance positive de x . On impose de plus que chaque puissance de x apparaisse dans au plus un terme de la somme. Par exemple, si a et x sont deux réels, la forme développée et réduite de l'expression polynomiale en x égale à $x(x + \sin(a)) + 7(ax - 1)^2$ se calcule comme suit

$$\begin{aligned} x(x + \sin(a)) + 7(ax - 1)^2 &= x^2 + \sin(a)x + 7a^2x^2 - 14ax + 7 && \left| \begin{array}{l} \text{Développement de l'expression} \\ \text{Regroupement des puissances communes} \end{array} \right. \\ &= (1 + 7a^2)x^2 + (\sin(a) - 14a)x + 7 \end{aligned}$$

Division euclidienne

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. On peut montrer qu'il existe un unique $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. On dit qu'on a effectué la division euclidienne du dividende a par le diviseur b pour obtenir le quotient q et le reste r . Notez que dans ce cadre a et r sont en relation pour la **congruence** ? modulo b . Donc une fois fixé un entier naturel n non nul, tout entier a est congru à un unique entier appartenant à $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ modulo n , à savoir le reste de la division euclidienne de a par n . Fixons par exemple $n = 7$. Comme $74 = 7 \times 10 + 4$ on sait que $74 \equiv 4 [7]$. Comme $-58 = 7 \times (-9) + 5$ on sait que $-58 \equiv 5 [7]$.

Expression polynomiale

Une expression polynomiale en une variable x est une expression obtenue en n'effectuant que des sommes et des produits de x et d'objets indépendants de x . Par exemple, si x est un réel, $3(x+1)^2 - 4x$ est une expression polynomiale en x , alors que $x - 4x^2 \sin(x)$ n'en est pas une à cause de la présence de $\sin(x)$. Il faut prendre garde que la notion d'expression polynomiale est relative à une variable. Par exemple si x, y et z sont trois complexes, l'expression

$$\frac{x^2y + 2z(x+y)}{z+4} - \frac{xy}{z} - 7x^4$$

est polynomiale en x et en y mais pas en z . La notion d'expression polynomiale est en fait très formelle; on ne s'intéresse pas réellement à la nature de la variable relativement à laquelle on regarde si l'expression étudiée est polynomiale, mais plutôt aux opérations effectuées avec cette variable. Vous rencontrez donc aussi la notion d'expression polynomiale en un objet. Par exemple, si x est un complexe, l'expression

$$7x^6 - 4x^4 + 3$$

est polynomiale en x mais aussi «en x^2 ». Cela signifie que si on substitue une lettre y à x^2 , on obtient une expression construite à l'aide de sommes et de produits de y et d'objets indépendants de y , à savoir $7y^3 - 4y^2 + 3$. De manière analogue, si x est un réel, l'expression

$$3(\sin(x))^4 - \sin(x)(5\sin(x) + 4)$$

est polynomiale «en $\sin(x)$ ». Cela signifie que si on substitue une lettre y à $\sin(x)$, on obtient une expression construite à l'aide de sommes et de produits de y et d'objets indépendants de y , à savoir $3y^4 - y(5y + 4)$.

Expression rationnelle

Une expression rationnelle en une variable x est une expression obtenue en n'effectuant que des sommes, des produits et des quotients de x et d'objets indépendants de x . Par exemple, si x est un réel, $\frac{3(x+1)^2}{4x^2+1}$ est une expression rationnelle en x , alors que $x - 4x^2 \sin(x)$ n'en est pas une à cause de la présence de $\sin(x)$. Il faut prendre garde que la notion d'expression rationnelle est relative à une variable. Par exemple si x , y et z sont trois réels, l'expression

$$\frac{x^2 \sin(y) + 2xz}{3x^3y + z^2 + 1}$$

est rationnelle en x et en z mais pas en y . La notion d'expression rationnelle est en fait très formelle; on ne s'intéresse pas réellement à la nature de la variable relativement à laquelle on regarde si l'expression étudiée est rationnelle, mais plutôt aux opérations effectuées avec cette variable. Vous rencontrez donc aussi la notion d'expression rationnelle en un objet. Par exemple, si x est un réel, l'expression

$$\frac{3(e^x + 1)^4}{e^{2x} + 1} - 4e^x$$

est polynomiale «en e^x ». Cela signifie que si on substitue une lettre y à e^x , on obtient une expression construite à l'aide de sommes, de produits et de quotients de y et d'objets indépendants de y , à savoir $\frac{3(y+1)^4}{y^2+1} - 4y$.

Facteur premier

Parmi les entiers naturels différents de 1, certains ne sont divisibles que par 1 et eux-même. C'est le cas de 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17... mais pas de 22 qui est divisible par 2. De tels nombres sont dit premiers. Un théorème d'arithmétique assure que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers, cette écriture étant unique à l'ordre près des facteurs. Par exemple, la décomposition en facteurs premiers de 14168616 est

$$14168616 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11^2 \times 17 \times 41$$

Fraction irréductible

Une fraction irréductible est une fraction numérique dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers qui n'ont pas de diviseur positif commun en dehors de 1. En pratique, on impose que le dénominateur soit strictement positif, que la fraction considérée soit un nombre positif ou négatif. Par exemple,

$$A = \frac{12}{15}$$

n'est pas une fraction irréductible car 3 divise 12 et 15. Comme 3 est en fait le plus grand diviseur commun de 12 et 15, la forme irréductible de A est

$$A = \frac{4}{5}$$

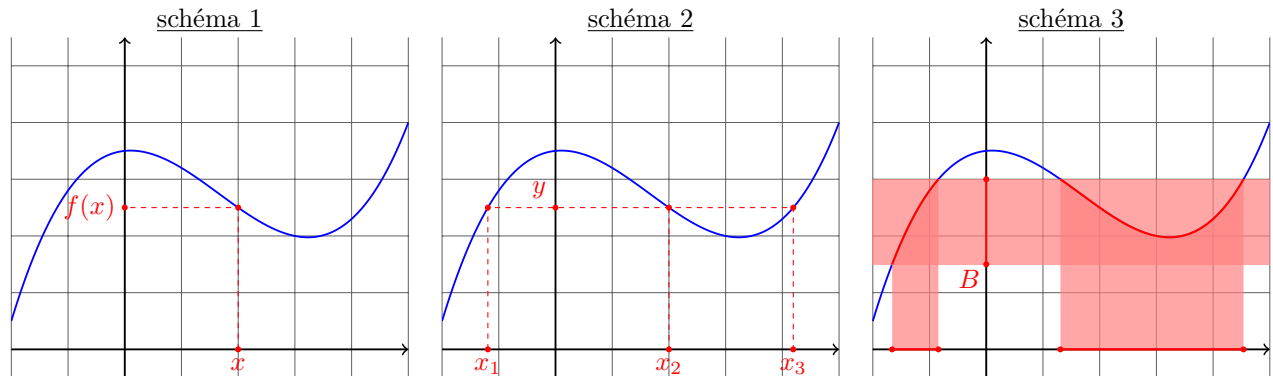
On peut montrer que tout nombre rationnel admet une unique forme irréductible. Ce résultat abstrait, essentiel dans certaines preuves, est inutile dans les cas pratiques puisque l'on peut effectivement simplifier toute fraction numérique explicite.

Grapher

Soit E et F deux ensembles. Se donner une application ou une fonction f de E vers F consiste à se donner un processus permettant d'associer à chaque élément x de E un unique élément de F , noté $f(x)$ et appelé image de x par f . Dans ce cadre, pour tout $y \in F$, les éléments de E dont l'image par f est y sont appelés antécédents de y par f . Le graphe de f est l'ensemble $\{(x, f(x)), x \in E\}$. Lorsque E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, on a l'habitude de représenter le graphe de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ en traçant tous les points de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque x parcourt E . Dans ce cadre, la donnée du graphe d'une fonction f permet de repérer énormément de propriétés de f (symétries, monotonie, bornes...) et d'étudier des équations et des inéquations construites à partir de f . On considère par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f : [-2; 5] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^3}{10} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{10} + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Sur le schéma 1 ci-dessous, on détermine graphiquement l'image d'un réel x ; dans notre cas, on note que $f(2) = 2,5$. Sur le schéma 2 ci-dessous, on fixe y dans $\mathbb{R}$ et on cherche les antécédents de y par f ; autrement dit, on cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [-2; 5]$. En choisissant $y = 2,5$, on détermine trois solutions que l'on a appelées x_1 , x_2 et x_3 et qui sont approximativement égales à $-1,19$, $2,50$ et $4,19$. Enfin sur le troisième schéma ci-dessous, on cherche l'ensemble des antécédents par f des réels appartenant à l'intervalle B de $\mathbb{R}$ égal à $[1,5; 3]$; autrement dit, on veut résoudre le système d'inéquations $1,5 \leq f(x) \leq 3$ d'inconnue $x \in [-2; 5]$. L'ensemble des solutions de ce système est formé par les abscisses des points de l'axe des abscisses surlignés en rouge, soit approximativement $[-1,66; -0,84] \cup [1,31; 4,54]$.



Identifier

Certain objets mathématiques sont uniquement définis. Lorsque l'on dispose de deux expressions pour ce type d'objet, on sait que ces deux expressions sont les mêmes. Faire une identification consiste alors à écrire l'égalité entre les deux expressions. On peut par exemple montrer que les coefficients d'une expression polynomiale écrite sous forme développée sont uniques. Donc si on trouve deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(a+1)x^2 + (a+b)x = 4x^2 + 5x$, on peut identifier les coefficients de ces expressions développées et écrire que $a+1 = 4$ et $a+b = 5$; Autrement dit, on est sûr que $a = 3$ et $b = 2$.

Identité

En mathématique, on appelle identité une assertion logique vraie pour tout un ensemble d'objets que l'on doit impérativement préciser. Par exemple, l'assertion

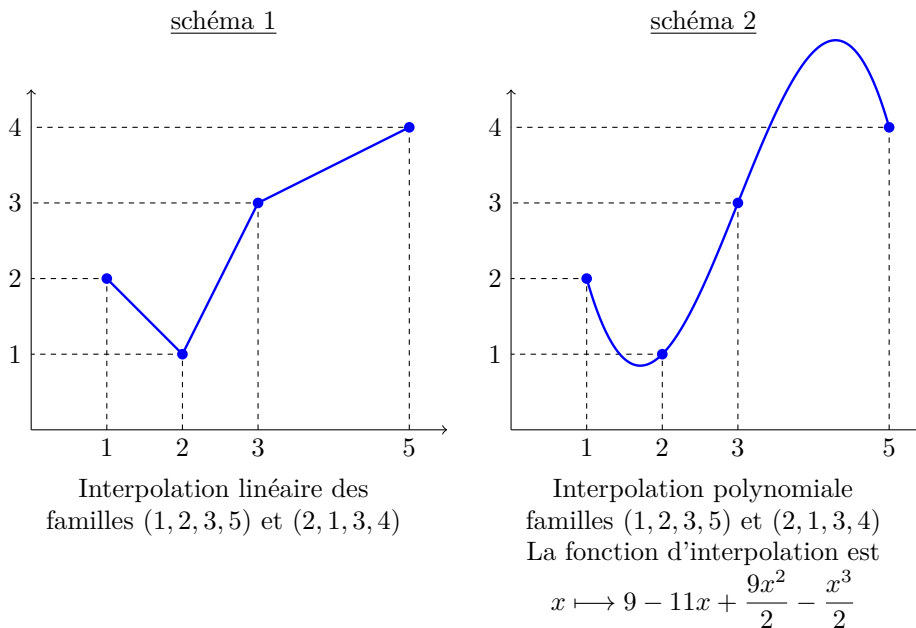
$$\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{C}^2, (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

est une identité. Notez que cette identité est valable lorsqu'on l'emploie avec des complexes x et y quelconques. En revanche, cette même formule n'est pas vraie pour des matrices x et y quelconques, bien que l'on sache faire des sommes et des produits de matrices. Il est donc indispensable d'apprendre non seulement les diverses identités mais aussi leur cadre d'application. Cette notion sera approfondie dans la cinquième leçon, où vous étudierez comment établir des identités.

Interpolation

Soit n un entier naturel, $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts classés par ordre strictement croissant et $y_0, \dots, y_n$ des réels quelconques. L'interpolation des familles $(x_0, \dots, x_n)$ et $(y_0, \dots, y_n)$ est une opération mathématique consistant à construire une fonction définie sur $[x_0; x_n]$ telle que pour tout entier naturel i plus petit que n , $f(x_i) = y_i$. L'interpolation la plus simple est l'interpolation linéaire qui consiste à construire une fonction f affine par morceaux.

Graphiquement, on se contente de construire les segments reliant les points de coordonnées (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) pour tout entier naturel i plus petit que $n - 1$; on pourra observer le schéma 1. Mais on peut construire beaucoup d'autres interpolations. Par exemple, on montrera en sup que l'on peut toujours construire une interpolation polynomiale, c'est à dire une fonction polynomiale f telle que pour tout entier naturel i plus petit que n , $f(x_i) = y_i$; on peut même imposer à f d'être de degré au plus n . Cette interpolation est construite sur le schéma 2 ci-dessous.



La notion d'interpolation est extrêmement utile tant en analyse numérique pour faire du calcul approché d'intégrales par exemple, qu'en infographie. Nous développerons certains de ces thèmes en sup.

Solution

Une équation numérique est une égalité dépendant d'une ou plusieurs variables appartenant à un domaine fixé, vraie lorsque ces variables prennent des valeurs précises inconnues à priori; ces variables sont appelées les inconnues. Une inéquation est un objet analogue mettant en jeu une inégalité au lieu d'une égalité. Les solutions d'une équation ou d'une inéquation sont les valeurs que peuvent prendre les inconnues pour que l'égalité considérée soit vraie. Résoudre une équation ou une inéquation consiste à trouver toutes ses solutions. Une équation ou une inéquation peut dépendre d'autres grandeurs que les inconnues, appelées souvent paramètres. On cherche par exemple la longueur du côté d'un carré dont l'aire a est donnée. On cherche donc les réels strictement positifs x tels que $x^2 = a$. Dans cette équation élémentaire, a est un paramètre, x est l'inconnue et le domaine de recherche est $\mathbb{R}^{+*}$. Cette équation admet une unique solution qui est $\sqrt{a}$.

Variations

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est

- croissante si et seulement si pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x \leq y$, $f(x) \leq f(y)$.
- décroissante si et seulement si pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x \leq y$, $f(x) \geq f(y)$.
- monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante
- strictement croissante si et seulement si pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$, $f(x) < f(y)$.
- strictement décroissante si et seulement si pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$, $f(x) > f(y)$.
- est strictement monotone si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante

Étudier les variations de f consiste à trouver les parties E de D sur lesquelles la fonction f est monotone, voire strictement monotone, et de préciser le sens de monotonie. On considère par exemple les fonctions

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \qquad \qquad \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$. Notez que la fonction g **n'est pas** strictement décroissante, ni même décroissante. En effet, on note que $-1 < 1$ et $g(-1) < g(1)$. Le résultat le plus classique pour montrer qu'une fonction est monotone est le suivant: soit u une fonction définie et dérivable **sur un intervalle**; si u' ne prend que des valeurs positives alors u est croissante et si u' ne prend que des valeurs négatives, alors u est décroissante. Vous noterez que la fonction g de l'exemple précédent est dérivable, que sa dérivée ne prend que des valeurs négatives et qu'elle n'est pas monotone. Mais g n'est pas définie sur un intervalle donc il n'y a aucune contradiction!