
Les nombres réels

Indication 189. Exercice d'application directe. Par exemple, pour déterminer la borne supérieure d'un ensemble E : on conjecture une valeur possible M , montre que M est un majorant. On essaie de voir si $M \in E$, auquel cas $\max(E) = M$, d'où $\sup(E) = M$. Sinon, il faut utiliser un des quatre critères de caractérisation de la borne supérieure vus en cours (le plus simple est souvent le dernier : le critère séquentiel).

1. L'ensemble possède un maximum (à déterminer!), mais pas de minimum (mais une borne inférieure?).
2. Distinguer suivant la parité de l'indice peut être utile ici.
3. L'ensemble n'admet pas de borne supérieure (à justifier!). L'ensemble admet un minimum.

Indication 190. Rien de particulier. L'ensemble A admet un maximum, mais pas de minimum.

Indication 191. Il n'y a pas encore d'indication.

Indication 192. Il n'y a pas encore d'indication.

Indication 193. Pour le domaine de définition, on utilise la méthode habituelle. On s'intéressera donc à l'équation $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}^*$ pour le domaine de définition de g .

Pour se donner une idée de l'allure de la courbe représentative de g , on peut essayer de résoudre $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$, puis $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 2$, et généraliser à $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = k$, où $k \in \mathbf{Z}$.

On rappelle que, pour tout $(x, \alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\lfloor x \rfloor = \alpha \iff \alpha \leq x < \alpha + 1$.

Indication 194. Il y a beaucoup de façons de faire. Une méthode consiste à introduire $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - \lfloor 2x \rfloor$, et à démontrer que cette fonction est périodique. Notons $T > 0$ une période de f . Il reste alors à montrer que pour $x \in [0; T[$, $f(x) = 0$.

Indication 195. Pour résoudre de telles équations, on peut procéder par analyse/synthèse.

- *Analyse.* On se donne x une solution du problème. À partir d'encadrements du type $\alpha - 1 < \lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha$, on peut obtenir un encadrement de $x : x \in I$, avec I un intervalle borné.
- *Synthèse.* Soit $x \in I$. Il faut vérifier si x vérifie le problème initial. Par exemple, pour la question 1, il s'agit de déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5 - x \rfloor$. Pour cet exemple, on doit obtenir, après la phase d'analyse, $x \in]\frac{4}{3}; 2[$, donc $\lfloor 2x \rfloor \in \{3, 4\}$. On peut commencer par résoudre $\lfloor 2x \rfloor = 3$ et $\lfloor 5 - x \rfloor = 3$. Si ces deux équations ont des solutions communes, alors celles-ci sont solutions de $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5 - x \rfloor$. Etc.
On rappelle que, pour tout $(x, \alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\lfloor x \rfloor = \alpha \iff \alpha \leq x < \alpha + 1$.

Indication 196. • Implication directe. Notons $T > 0$ une période de f . Il faut utiliser $f(0) = f(T)$ pour en déduire que α est égal à un quotient d'entiers.

- Implication réciproque. Si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $q \neq 0$, on peut montrer que f est q -périodique.

Indication 197. Il n'y a pas encore d'indication.

Indication 198. Il n'y a pas encore d'indication.

Indication 199. Il n'y a pas encore d'indication.

Indication 200. Il n'y a pas encore d'indication.

Indication 201. 1. Comme d'habitude, on utilise les inégalités caractéristiques : $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m \iff m \leq \sqrt{k} < m + 1 \iff \dots$

2. Il peut être utile d'écrire u_n ainsi : $u_n = \sum_{m=1}^n \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \dots$

- Indication 202.**
1. On conjecture que $A + B = [0 ; 2]$, et on montre cette égalité d'ensembles par double inclusion.
 2. Même idée qu'avant, en faisant bien attention aux bornes ouvertes et fermées. On rappelle que si $a \geq b$ et $c > d$, alors $a + c > b + d$, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.
 3. Puisque $A + B$ est non vide majorée, Pour déterminer $\sup(A + B)$, il faut un candidat. On parle aussi de $\sup(A) + \sup(B)$ dans l'énoncé...

Indication 203. Pour montrer que B admet une borne supérieure, il faut justifier que B est non vide et trouver un majorant (il est donné dans l'énoncé si vous lisez bien). Pour prouver que ce majorant M est la borne supérieure de B , on pourra s'en donner un autre M_1 , et montrer que $M_1 \leq M$, en utilisant l'inégalité

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x - y \leq |x - y| \leq M_1,$$

par exemple, de laquelle on peut déduire

$$\forall y \in A, \quad \sup(A) \leq M_1 + y.$$

Ainsi $\sup(A) - M_1$ minore A et l'on peut conclure.

- Indication 204.**
1. L'existence est donnée par un théorème du cours.
Pour montrer que $a \in [0 ; 1]$. On peut remarquer que $0 \in A$ pour $a \geq 0$. On peut raisonner par l'absurde pour $a \leq 1$, et utiliser une des caractérisations de la borne supérieure.
 2. Simple inclusion d'ensemble. Il faut traduire ce que signifie appartenir à l'image directe de A pour commencer.
 3. Si $x \in A$, alors $x \leq a$. On rappelle que f est croissante... Il faut aussi utiliser que $x \in A$ signifie $x \leq f(x)$.
 4. Le point fixe est a ; on peut montrer que $f(a) = a$ par double inégalité.
 5. Le résultat n'est plus vrai. Il existe un contre-exemple très (très) simple.