
Rappels de terminale

1 Fonction exponentielle

Exercice 1. Développer les expressions suivantes, où $x \in \mathbf{R}$.

$$(a) (e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x} + e^{-x}); \quad (b) (e^x + 1)^2 - (e^{-x} - 1)^2; \quad (c) (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2.$$

Exercice 2. Factoriser les expressions suivantes, où $x \in \mathbf{R}$.

$$(a) e^{2x} - e^x; \quad (b) e^{2x} - 1; \quad (c) 4e^{2x} + 4e^x + 1; \quad (d) xe^x - e^{3x}.$$

Exercice 3. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Montrer que :

$$(a) \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}; \quad (b) \frac{1 + e^{2x}}{1 - e^x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x} + 1}.$$

Exercice 4. Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivation et l'expression de la dérivée.

$$(a) x \mapsto \frac{e^x + 4}{x^2}; \quad (b) x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x - 1}; \quad (c) x \mapsto 2x^3 e^x; \quad (d) x \mapsto \frac{e^x - 2}{e^x + 1}.$$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

$$(a) e^{-2}e^{3x+4} = e^{-2}; \quad (c) e^{\frac{1}{4}x+1} - 1 = 0; \quad (e) e^{2x} + 3e^x - 4 = 0; \quad (g) e^x - 7 + 6e^{-x} = 0; \\ (b) 3e^{4x} - 2 = e; \quad (d) e^{x^2-4} = (e^{x+2})^2; \quad (f) e^{2x} = 5e^x + 25; \quad (h) e^x - 3 + e^{-x} = 1.$$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle :

$$(a) e^{-x} > 1; \quad (d) e^{x^2} \times e^{-x} < e^6; \quad (g) (1-x)e^x + e^x \geq 0; \quad (j) 3 + (x-2)e^x \leq 0; \\ (b) e^{3x} \geq e; \quad (e) x^2 + 1 + e^x \geq 0; \quad (h) (x-3)e^x \leq 0; \quad (k) -2xe^{1-x} + 3e^{1-x} > 0; \\ (c) e^{5-x} \leq e^{2x} \quad (f) 4e^x - 3 \leq 0; \quad (i) (x^2 + 1)e^{-2x} \geq 0; \quad (l) \frac{e^{2x}}{3x} \leq 0.$$

Exercice 7. Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivation et l'expression de la dérivée.

$$(a) x \mapsto e^{2x-1}; \quad (c) x \mapsto \cos(x)e^{\sin x}; \quad (e) x \mapsto e^{\frac{1}{x}}; \quad (g) x \mapsto xe^{-\frac{2}{x}}; \\ (b) x \mapsto e^{\sin x}; \quad (d) x \mapsto -3xe^{2x-1}; \quad (f) x \mapsto \frac{1}{x}e^{x^2-1}; \quad (h) x \mapsto e^{\frac{2x-3}{x}}.$$

Exercice 8. Etudier les variations des fonctions suivantes.

$$(a) x \mapsto (x^2 - 3x + 1)e^x; \quad (b) x \mapsto (x + 2)e^{2x-1}; \quad (c) x \mapsto \frac{2x-3}{e^x}; \quad (d) x \mapsto e^{2x} - 3e^x.$$

Exercice 9. Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$(a) x \mapsto e^{-x} + x; \quad (c) x \mapsto e^{2x} - e^x; \quad (e) x \mapsto \frac{e^x - x}{e^x + 1}; \\ (b) x \mapsto (x + 3)e^x; \quad (d) x \mapsto e^x - xe^x + 1; \quad (f) x \mapsto \frac{e^x + 3x}{x + 1}.$$

Exercice 10. On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = xe^x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier le sens de variation de chaque fonction.
2. Montrer que :
 - (a) $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ n'ont que le point O en commun.
 - (b) $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune en O .

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x - 1}.$$

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = -xe^x - 1$ pour tout x réel. Montrer que, sur $\mathbf{R}^*$, f' a le même signe que g .
2. Étudier les variations de g sur $\mathbf{R}$, puis en déduire son signe.
3. Donner les variations de f .

2 Fonction logarithme népérien

Exercice 12. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\ln(e^x + 3x) - x = \ln\left(1 + 3\frac{x}{e^x}\right).$$

Exercice 13. Après avoir déterminé leur domaine de validité, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

- | | |
|--|---|
| (a) $\ln(4x^2 - 1) = \ln(x + 2)$; | (d) $x \ln(x) = 0$; |
| (b) $\ln(2x - 1) + \ln(2x + 1) = \ln(x + 2)$; | (e) $\ln(3x) + \ln(x - 1) = \ln(6)$; |
| (c) $\ln(x - 1) - \ln(3x + 4) = \ln(5x)$; | (f) $\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2) = -\ln(x - 2)$. |

Exercice 14. Après avoir déterminé leur domaine de validité, résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (a) $x \ln(x - 1) \geq 0$; | (d) $\ln(x - 13) \geq 2 \ln(x + 3)$; |
| (b) $\ln(x)(1 - \ln(x)) < 0$; | (e) $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 > 0$; |
| (c) $\frac{x}{\ln(x) - 1} \geq 0$; | (f) $\frac{1 - \ln(x)}{1 + \ln(x)} \geq 0$. |

Exercice 15. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $x \mapsto \ln(x^2 + 4)$; | (b) $x \mapsto \ln(x^2 + 3e^x)$; | (c) $x \mapsto \ln(2 - \cos(x))$; | (d) $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$. |
|--------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|

Exercice 16. Déterminer les limites des fonctions suivantes, en 0 et en $+\infty$.

- | | | | |
|--------------------------------------|--|--|---------------------------------------|
| (a) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x+1}$; | (b) $x \mapsto \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$; | (c) $x \mapsto \frac{1}{x} - \ln(x)$; | (d) $x \mapsto (\ln(x))^2 - \ln(x)$. |
|--------------------------------------|--|--|---------------------------------------|

Exercice 17. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f_k(x) = x - \ln\left(\frac{x}{k}\right),$$

et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

1. Étudier les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f_k admet un minimum en un réel indépendant de k . Interpréter graphiquement ce résultat.
3.
 - (a) Montrer que la fonction $f_{k+1} - f_k$ est constante.
 - (b) Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente.
 - (c) Étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$. Que devient l'écart entre $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$ quand k tend vers $+\infty$?